

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.Б. Воржев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТРОЙСТВ  
ЭЛЕКТРОНИКИ И РАДИОТЕХНИКИ.  
КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

учебное пособие

Ростов-на-Дону  
ДГТУ  
2022

УДК 629.113.004.58

В75

*Рецензент*

кандидат технических наук, доцент *В.Е. Сивоконь*

**Воржев Владимир Борисович.**

В75

Математическое моделирование устройств электроники и радиотехники. Контрольные работы: учебное пособие / В.Б.

Воржев;

Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону : ДГТУ, 2022. – 56 с.

ISBN 978-5-7890-1763-0

В учебном пособии приведены краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения контрольных работ обучающимися заочной формы обучения. Здесь же, приведены примеры решения заданий, исходные данные вариантов контрольных работ, контрольные вопросы к ним и перечень вопросов к экзамену.

Пособие предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 11.03.01 Радиотехника, 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи, 11.03.04 Промышленная электроника и микропроцессорная техника.

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Донского государственного технического университета

© Воржев В.Б., 2022

© Донской государственный  
технический университет, 2022

ISBN 978-5-7890-1763-0

## Введение

Математическое моделирование является отраслью науки, изучающей способы применения классических разделов математики для описания процессов, протекающих в технических, экономических, социальных и других системах, требующих отыскания решений при известных законах и закономерностях, которым подчинены эти системы.

Область электроники и радиотехники, также, активно использует этот раздел знаний для описания типовых электронных и радиотехнических устройств с целью определения их параметров и характеристик в области рабочих частот, токов, температур, напряжений и т.д.

Главным отличием данного курса от методов классической математики является то, что применяемые здесь математические модели являются прямым следствием физических принципов работы определенных приборов и устройств, понимание которых необходимо для успешного усвоения данной дисциплины. Так, например, для описания работы полупроводникового диода используются две модели: линейная – соответствующая открытому диоду, и нелинейная – соответствующая диоду, напряжение на котором недостаточно для его полного отпираания.

Исходя из вышесказанного, главной задачей обучающегося является освоение приведенных в данном курсе типовых математических методов с обязательной привязкой этих методов к принципам работы приборов и устройств, поведение которых ими описывается.

Успешное освоение данного курса позволит обучающимся существенно расширить набор методов для изучения поведения типовых устройств электроники и радиотехники, позволив им, в будущей профессиональной деятельности, решать практические задачи, умело сочетая экспериментальные данные с адекватными математическими расчетами.

## 1. Частотно-зависимые линейные четырехполюсники

*Линейным четырехполюсником* называется устройство, состоящее из линейных электротехнических компонентов: резисторов, конденсаторов и катушек индуктивностей, и имеющих две входные и две выходные клеммы, как это показано на рис. 1.1.



Рис. 1.1. Схематическое изображение линейного четырехполюсника

Частотная зависимость напряжения на выходе такого четырехполюсника обусловлена частотными зависимостями емкостных и индуктивных сопротивлений, *комплексы* которых описываются следующими формулами:

$$\underline{X}_C = -j \frac{1}{\omega C} \quad (1.1);$$

$$\underline{X}_L = j\omega L \quad (1.2).$$

В математических расчетах часто бывает полезным введение комплексов соответствующих проводимостей, определяемые следующим образом:

$$\underline{G}_C = j\omega C \quad (1.3);$$

$$\underline{G}_L = -j \frac{1}{\omega L} \quad (1.4).$$

Важным является то, что, согласно формулам (1.1) и (1.2), величины  $X_C$  и  $X_L$  являются комплексными. Модули этих величин определяются, согласно следующим выражениям:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (1.5);$$

$$X_L = \omega L \quad (1.6).$$

Аналогичными выражениями определяются и модули соответствующих проводимостей:

$$G_C = \omega C \quad (1.7).$$

$$G_L = \frac{1}{\omega L} \quad (1.8);$$

Если на участке цепи включено несколько сопротивлений различного типа, то определение комплекса полного сопротивления  $Z$  производится векторным сложением сопротивлений (при последовательном соединении) и векторным сложением проводимостей (при параллельном соединении).

Так, например, при последовательном соединении активного сопротивления  $R$  и индуктивного  $X_L$ , получим следующий комплекс полного сопротивления:

$$\underline{Z} = R + jX_L = Ze^{j\varphi},$$

где модуль сопротивления  $Z$  и электрический сдвиг фаз  $\varphi$  рассчитываются по известным в высшей математике формулам:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{X_L}{R}\right).$$

Приведем ещё пример: определим полное сопротивление цепи, состоящей из параллельно включенных сопротивления  $R$  и емкостного сопротивления  $X_C$ .

Полная проводимость цепи, согласно (1.3):

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C = g + j\omega C,$$

где  $g$  – проводимость сопротивления  $R$ .

Тогда, полное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = \frac{1}{g + j\omega C}.$$

Для упрощения этого выражения, домножим числитель и знаменатель полученного выражения на комплексно-сопряженный множитель  $g - j\omega C$ :

$$\underline{Z} = \frac{g - j\omega C}{g^2 + (\omega C)^2} = \frac{g}{g^2 + (\omega C)^2} - j \frac{\omega C}{g^2 + (\omega C)^2}.$$

В результате типовых преобразований, получен комплекс проводимости в алгебраической форме записи.

При совершении алгебраических операций с токами и напряжениями руководствуются законами Ома и законами Кирхгофа, записанными в векторной (комплексной) форме. Приведем несколько примеров.

Пусть, источник синусоидального напряжения с действующим значением  $U$  и внутренним сопротивлением  $r$  подключен к нагрузке с сопротивлением  $Z = R + jX_L$ . Требуется определить модуль падения напряжения на нагрузке.

Комплекс силы тока в цепи, согласно закону Ома:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + r + jX_L}.$$

Модуль силы тока:

$$I = \frac{U}{\sqrt{(R + r)^2 + X_L^2}}.$$

Тогда, модуль падения напряжения на нагрузке, согласно закону Ома:

$$U_H = ZI = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R + r)^2 + X_L^2}} U.$$

Следующий пример. В некий узел втекает неизвестный ток  $I_1$  и ток  $I_2 = 2e^{j45^\circ}$ , а вытекает из этого узла ток  $I_3 = 3e^{j0^\circ}$ . Определить показания амперметра в цепи протекания тока  $I_1$ .

Согласно 1-му закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_3 - \dot{I}_2.$$

Для совершения операции вычитания, выразим токи в алгебраической форме, согласно правилам высшей математики:

$$\dot{I}_2 = 2\cos 45^\circ + j2\sin 45^\circ = 1,41 + j1,41 \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = 3\cos 0^\circ + j3\sin 0^\circ = 3 + j0 \text{ A}.$$

Определим комплекс тока  $I_1$  в алгебраической форме:

$$\dot{I}_1 = 1,59 - j1,41 \text{ A}.$$

Поскольку показания амперметра соответствуют модулю комплекса тока, то, - окончательный ответ:

$$I_1 = \sqrt{(1,59)^2 + (1,41)^2} = 2,13 \text{ A}.$$

Частотно-зависимые четырехполюсники весьма широко применяются в современной электронике, позволяя реализовать *электрические фильтры* – устройства, избирательно пропускающие спектр входного сигнала.

В электронике известны следующие типы электрических фильтров: *фильтры нижних частот* (фильтры НЧ) – пропускающие полосу частот входного сигнала ниже граничной частоты (называемой *частотой среза*) и не пропускающие остальные частоты, что соответствует условию

$$f < f_{\text{ср}};$$

*фильтры верхних частот* (фильтры ВЧ) – пропускающие полосу частот входного сигнала выше частоты среза и не пропускающие остальные частоты, что соответствует условию

$$f > f_{\text{ср}};$$

*полосовые фильтры* – пропускающие полосу частот входного сигнала в некотором диапазоне, ограниченном двумя частотами среза и не пропускающие остальные частоты, что соответствует условию

$$f_{\text{ср},1} < f < f_{\text{ср},2};$$

*режекторные фильтры* – не пропускающие полосу частот входного сигнала в некотором диапазоне, ограниченном двумя частотами среза и пропускающие остальные частоты, что соответствует условию

$$f < f_{\text{ср},1}, \text{ либо } f > f_{\text{ср},2}.$$

Рассмотрим пример реализации простейшего электрического фильтра, изображенного на рис. 1.2.

Пусть внутреннее сопротивление источника напряжения  $U_g$  составляет  $R_{\text{вн}} = 300 \text{ Ом}$ ; емкость конденсатора  $C = 1,8 \text{ мкФ}$ ; сопротивление нагрузки  $R_n = 1 \text{ кОм}$ .

Произведем анализ этого фильтра, воспользовавшись символическим методом.

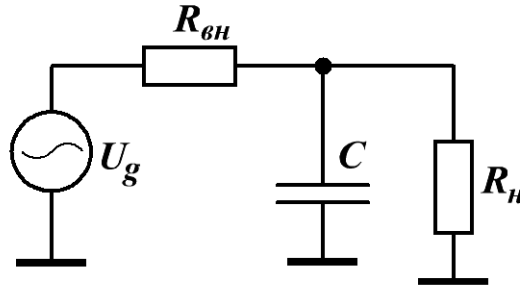


Рис. 1.2 Пример реализации простейшего электрического фильтра

Произведем, вначале, качественный анализ работы этого устройства.

Предположим, что частота источника сигнала настолько мала, что емкостное сопротивление стремится к бесконечности (образует обрыв провода). В этом случае, фильтр представляет собой резистивный делитель напряжения, и его коэффициент передачи определяется следующим образом:

$$k_U = \frac{R_n}{R_{вн} + R_n} = \frac{1 \text{ кОм}}{1,3 \text{ кОм}} \approx 0,77.$$

Пересчитаем величину коэффициента передачи  $k_U$  в децибелах, которыми измеряется *уровень передачи сигнала*, по известной в электротехнике формуле:

$$A = 20 \lg(k_U) \approx -2,28 \text{ (дБ)}.$$

Предположим, теперь, что частота источника сигнала настолько велика, что емкостное сопротивление цепи стремится к нулю. Это означает, что сопротивление нагрузки будет замкнуто накоротко емкостным сопротивлением и напряжение на выходе устройства будет равно нулю.

Это означает, что электрический фильтр, изображенный на рис. 1.2, пропускает, с незначительным ослаблением, нижнюю часть спектра входного сигнала и препятствует прохождению верхней части спектра, что соответствует определению фильтра нижних частот (частотная характеристика такого фильтра будет получена ниже).

Рассчитаем комплекс коэффициента передачи этого фильтра в режиме холостого хода (то есть, - при отключении сопротивления нагрузки):



$$\dot{k}_U = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_g} = \frac{1/j\omega C}{R_{\text{ВН}} + 1/j\omega C}.$$

Модуль коэффициента передачи можно определить как частное модулей, присутствующих в данном выражении:

$$k_U = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_g} = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R_{\text{ВН}}^2 + 1/(\omega C)^2}}.$$

Для упрощения полученного выражения, умножим числитель и знаменатель на величину  $\omega C$ :

$$k_U = \frac{1}{\sqrt{(\omega R_{\text{ВН}} C)^2 + 1}}.$$

Анализируя поведение функции  $k_U(\omega)$ , можно легко убедиться в правильности, проведенных выше, качественных рассуждений, поскольку

$$k_U|_{\omega \rightarrow 0} = 1; \quad k_U|_{\omega \rightarrow \infty} = 0.$$

Для математического описания частотной характеристики рассматриваемого фильтра под нагрузкой воспользуемся, известным в теоретической электротехнике, *методом двух узлов*.

Вводя соответствующие величины проводимостей для сопротивлений  $R_{\text{ВН}}$  и  $R_{\text{Н}}$ , получим:

$$\dot{U}_{\text{Н}} = \frac{\dot{U}_g g_{\text{ВН}}}{g_{\text{ВХ}} + g_{\text{Н}} + j\omega C}.$$

Тогда, комплекс коэффициента передачи:

$$\dot{k}_U = \frac{g_{\text{ВН}}}{g_{\text{ВН}} + g_{\text{Н}} + j\omega C}.$$

Разделив числитель и знаменатель этого выражения на величину  $g_{\text{ВН}}$ , получим:

$$\dot{k}_U = \frac{1}{1 + \frac{g_{\text{Н}}}{g_{\text{ВН}}} + j\omega R_{\text{ВН}} C}.$$

Тогда, модуль коэффициента передачи, как функция от круговой частоты  $\omega$ :

$$k_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{g_H}{g_{BH}}\right)^2 + (\omega R_{BH} C)^2}}.$$

Важно отметить, что для построения *логарифмических амплитудно-частотных характеристик* (ЛАЧХ), следует построить функцию  $k_U(f)$ , где  $f = \omega/(2\pi)$ , откладывая по оси абсцисс десятичный логарифм частоты, а по оси ординат – соответствующие данным частотам величины уровней сигнала.

ЛАЧХ исследованной схемы для режима холостого хода и под нагрузкой, представлены на рис. 1.3.

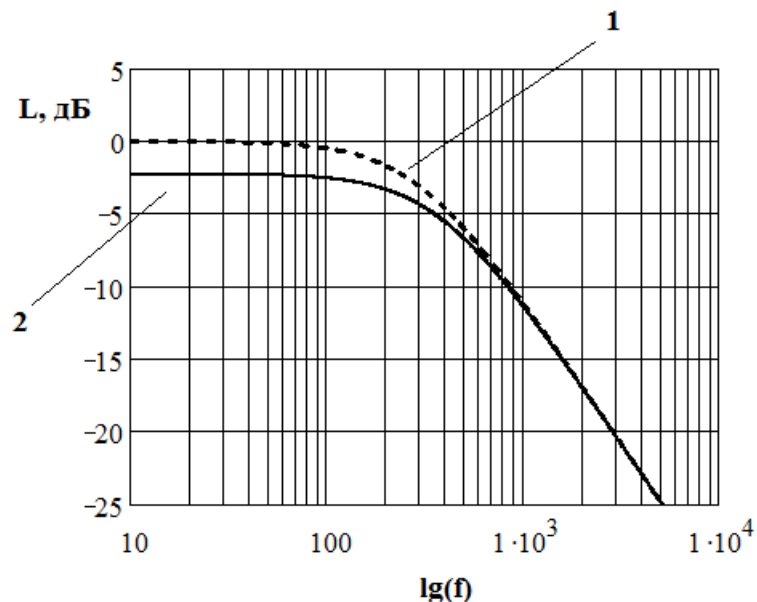


Рис. 1.3 ЛАЧХ исследованной схемы для режима холостого хода (пунктир) и работы под нагрузкой (сплошная линия)

## 2. Спектры периодических сигналов

В отличие от силовых устройств электротехники, на вход которых подается напряжение фиксированной частоты, равной 50 Гц, в устройствах приема и обработки, как правило, присутствуют сигналы, в состав которых входят гармонические составляющие различных частот. Описание таких сигналов нуждается в специальном математическом аппарате, который будет рассмотрен в данном разделе.

*Электрическим спектром* сигнала называется набор его гармонических составляющих, определяющий, с достаточной для инженерных расчетов точностью, величину его напряжения (или тока) в любой момент времени.

С практической точки зрения, наибольший интерес представляют спектры периодических сигналов, к числу которых можно отнести последовательность прямоугольных импульсов, пульсирующее напряжение, снимаемое с выхода электронного выпрямителя, или амплитудно- или частотно- модулированные сигналы, широко применяемые в радиотехнике.

При исследовании периодических сигналов несинусоидальной формы используют разложение Фурье, согласно которому, электрический сигнал периодической формы, с периодом  $T$ , может быть представлен в виде следующего набора  $n$  гармонических составляющих:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + \sum_{k=1}^n B_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \quad (2.1),$$

где  $U_0$  – постоянная составляющая напряжения, определяемая по формуле:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (2.2);$$

$A_k$  и  $B_k$  - коэффициенты разложения, определяемые из формул:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \quad (2.3);$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \quad (2.4).$$

Отыскание коэффициентов  $A_k$  и  $B_k$  (с точностью до  $n$ -й гармоники) дает возможность определить соответствующие амплитуды гармонических составляющих данного сигнала по формуле:

$$U_{m,k} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (2.5),$$

что является необходимым для экспериментальной проверки полученного разложения электрического сигнала в спектральный ряд.

Практически полезной, также, является формула, выражающая начальные сдвиги фаз для  $k$ -й гармоники, через известные коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$ :

$$\varphi_k = \arctg\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \quad (2.6).$$

Однако вычисление интегралов (2.2), (2.3) и (2.4) часто является сложной математической задачей, поэтому определение величин  $U_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$  производят методом быстрого преобразования Фурье, в котором аналитические интегралы заменяются конечными суммами (об этом достаточно подробно описано в контрольной работе №2).

Важными, с экспериментальной точки зрения, являются величины  $U_0$  и  $U$ , значение которых следует рассмотреть отдельно.

Постоянная составляющая напряжения  $U_0$  может быть измерена вольтметром, на котором установлен режим измерения постоянного напряжения.

Действующее значение напряжения  $U$ , согласно разложению Фурье, определяется по формуле:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [u(t)]^2 dt} \quad (2.7).$$

Можно доказать, что, при известных амплитудах спектральных составляющих сигнала, величина  $U$  может быть рассчитана и по другой формуле:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{m,1}^2}{2} + \frac{U_{m,2}^2}{2} + \dots + \frac{U_{m,n}^2}{2}} \quad (2.8).$$

Следует отметить, что величина  $U$  не может быть измерена непосредственно, однако технически возможно произвести измерение величины действующего значения переменной составляющей напряжения  $U_{\approx}$  (при установке режима измерения переменных напряжений), которая определяется по формуле:

$$U_{\approx} = \sqrt{\frac{U_{m,1}^2}{2} + \frac{U_{m,2}^2}{2} + \dots + \frac{U_{m,n}^2}{2}} \quad (2.9).$$

Сравнивая формулы (2.8) и (2.9), получим следующее полезное соотношение:

$$U = \sqrt{U_{\approx}^2 + U_0^2} \quad (2.10).$$

Соотношение (2.10) позволяет установить необходимое (для достижения заданной измерительной погрешности) количество гармоник  $n$  при помощи экспериментальных измерений. Для этого, производят экспериментальные измерения величин  $U_0$  и  $U_{\approx}$ , подключая к нагрузке вольтметр, включенный на соответствующие режимы измерения напряжения. А затем, производят сравнение величины  $U$ , полученной по формуле (2.8) при учете  $n$ -гармонических составляющих с соответствующей ей величиной, полученной в результате измерений, согласно формуле (2.10). Постепенно увеличивая количество учитываемых гармоник, добиваются выполнения равенства в выражении (2.10) с достаточной для инженерных расчетов погрешностью (которая, как правило, составляет от 2 до 3 %). Данная процедура позволяет получить минимальный набор гармонических

составляющих, учет которых приводит к построению достоверной математической модели при заданной форме источника сигнала.

Кроме этого, для экспериментально определения спектра сигнала, применяют электрические фильтры. Так, использование полосового фильтра позволяет выделить спектральный диапазон, соответствующий определенному номеру гармоники; использование фильтра НЧ позволяет выделить постоянную составляющую сигнала или суперпозицию постоянной составляющей и 1-й гармоники. Применение фильтра ВЧ позволяет выделить высшие гармоники сигнала, имеющие, как правило, небольшие значения амплитуд. Однако данный метод уступает методу, рассмотренному ранее, поскольку требует для своей реализации соответствующего аппаратного обеспечения.

Если к цепи переменного тока подключен источник периодического несинусоидального напряжения  $u(t)$ , для которого определен набор гармонических составляющих, с точностью до  $n$ -й гармоники, то напряжение на выходе цепи рассчитывается, рассмотренным ранее, символическим методом, при помощи метода суперпозиции.

*Метод суперпозиции*, в данном случае, выражается в том, что отклик цепи на воздействие периодического несинусоидального источника  $u(t)$  равен сумме откликов на воздействие каждой из его гармоник, комплексы которых (для каждой величины  $k$ ) заданы следующими выражениями:

$$\dot{U}_k = \frac{U_{m,k}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.11),$$

где амплитуда  $k$ -й гармоники  $U_{m,k}$  и ее начальная фаза  $\varphi_k$  определяются по формулам (2.5) и (2.6) соответственно.

Комплекс сопротивления цепи, для каждой частоты  $f_k$  вычисляется также, как, если бы, в цепи действовал источник синусоидального напряжения с частотой  $kf$ . Это означает, что комплексы емкостного и индуктивного сопротивления для источника с  $k$ -й частотой будут определяться по формулам, аналогичным (1.1) и (1.2), а соответствующие им комплексы проводимостей – по формулам, аналогичным (1.3) и (1.4):

$$\underline{X_{C,k}} = -j \frac{1}{k\omega C} \quad (2.12);$$

$$\underline{X_{L,k}} = jk\omega L \quad (2.13);$$

$$\underline{G_{C,k}} = jk\omega C \quad (2.14);$$

$$\underline{G_{L,k}} = -j \frac{1}{k\omega L} \quad (2.15).$$

При рассмотрении воздействия на заданную электрическую цепь постоянной составляющей напряжения  $U_0$ , следует применить формулы (2.12) – (2.15) для случая частоты, стремящейся к нулю. Это приводит к следующим значениям модулей сопротивлений и проводимостей:

$$X_{C,k} = \infty; X_{L,k} = 0; G_{C,k} = 0; G_{L,k} = \infty.$$

Как и прежде, равенство сопротивления нулю (или, проводимости – бесконечности) означает короткое замыкание для данного участка цепи, а равенство сопротивления бесконечности (или, проводимости – нулю) – обрыву для данного участка цепи.

### 3. Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях с использованием средств ПК

*Переходными процессами* в электрических цепях называются временные зависимости токов и напряжений в электрической цепи при ее переходе от одного установившегося состояния к другому.

*Установившимся состоянием* электрической цепи называются величины токов и напряжений, не изменяющих своих значений с течением времени, при условии отсутствия каких бы то ни было переключений (коммутаций).

Причиной возникновения переходных процессов является наличие в электрических цепях конденсаторов и катушек индуктивностей – компонентов, способных накапливать электрическую и, соответственно, магнитную энергии, выражающиеся через величины напряжения и тока следующим образом:

$$W_э = \frac{CU^2}{2}; W_м = \frac{LI^2}{2}.$$

Поскольку энергия электрической цепи не может измениться мгновенно, ее изменение носит непрерывный характер, который и определяет форму переходных процессов для конкретной электрической цепи.

Для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях (то есть, цепях, содержащих только линейные компоненты) необходимо использовать следующие соотношения.

*Законы коммутации:*

1-й закон коммутации гласит, что напряжение на конденсаторе до и после коммутации не изменяется, то есть,  $u_C(-0) = u_C(+0)$ ;

2-й закон коммутации гласит, что ток, протекающий через катушку индуктивности до и после коммутации не изменяется, то есть,  $i_L(-0) = i_L(+0)$ .

Очевидно, что законы коммутации являются следствием приведенных выше формул для электрической и магнитной энергии.

*Законы Ома в дифференциальной форме:*

$$u_L = L \frac{di}{dt}; i_C = C \frac{du}{dt}; i_R = \frac{u}{R} \quad (3.1).$$

Кроме этого, при составлении систем дифференциальных уравнений используют законы Кирхгофа, рассмотренные в предыдущих разделах этого курса.

Рассмотрим переходные процессы при поступлении последовательности прямоугольных импульсов амплитудой  $U_m$  на простейшую RC-цепь, показанную на рис. 3.1. При этом будем считать, что частота следования импульсов настолько мала, что цепь успевает полностью релаксировать ко времени поступлении следующего импульса.

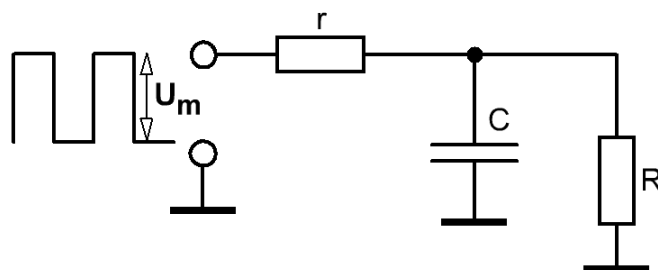


Рис. 3.1 Простейшая RC-цепь под воздействием последовательности прямоугольных импульсов



Вводя функции тока и напряжения на конденсаторе от времени  $i(t)$  и  $u_c(t)$ , запишем 2-й закон Кирхгофа для исследуемой цепи:

$$U_m = ri(t) + u_c(t) \quad (3.2).$$

В момент поступления импульса конденсатор полностью разряжен и напряжение на нем равно нулю; согласно законам коммутации, это означает, что и в первый момент после коммутации, напряжение на нем будет равно нулю:

$$u_c(-0) = u_c(+0) = 0.$$

Согласно выражению (3.2) это означает, что при  $t = +0$ , возникает максимальный ток заряда, равный

$$i(+0) = \frac{U_m}{r}.$$

Далее, по мере заряда конденсатора, напряжение на нем растет, а ток заряда – снижается до тех пор, пока не достигнет установившегося значения:

$$I_{уст} = \frac{U_m}{r + R}.$$

Напряжение на конденсаторе растет от нуля, до величины установившегося значения, равного:

$$U_{c,уст} = \frac{U_m R}{r + R}.$$

Аналитический расчет дает следующие временные зависимости для функции  $u_c(t)$ :

$$u_c(t) = \frac{U_m R}{r + R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{зар}}} \right),$$

где  $\tau_{зар}$  – время релаксации заряда конденсатора, определяемое следующим образом:

$$\tau_{зар} = \frac{rRC}{r + R}.$$

Величина  $\tau_{зар}$  масштабирует во времени переходный процесс, показывая степень его совершения за определенный интервал времени  $\Delta t$ . Если время релаксации какого-либо переходного процесса  $\tau$  известно, то полное протекание переходного процесса происходит в промежуток от  $3\tau$  до  $4\tau$ .

Графические зависимости для функций  $u_C(t)$  и  $i(t)$  представлены на рис. 3.2.

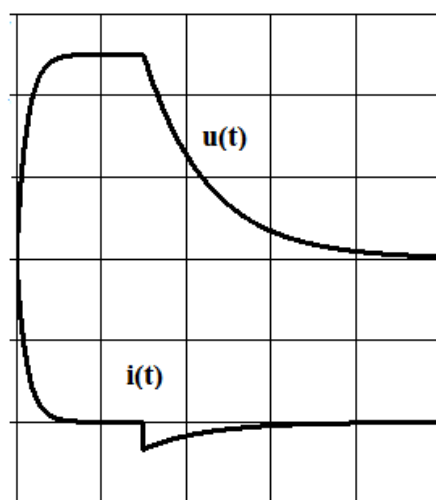


Рис. 3.2 Переходные процессы напряжения на конденсаторе  $u_C(t)$  и тока в  $RC$ -цепи  $i(t)$

Важно отметить, что, согласно рис. 3.2, при разряде конденсатора через сопротивление нагрузки  $R$ , разрядный ток изменяет свой знак. Это происходит вследствие того, что роль ЭДС, в течение процесса разряда, выполняет напряжение заряженного конденсатора, а ее направление изменяет знак тока на противоположный.

При численном определении динамики переходных процессов пользуются *методом переменных состояний*, суть которого заключается в отыскании напряжений на всех конденсаторах  $u_n(t)$  и токов, протекающих через все катушки индуктивности  $i_m(t)$ , где  $n$  и  $m$  – порядковые номера конденсатора и катушки индуктивности соответственно.

Подобный выбор переменных состояния не является случайным, поскольку, согласно законам коммутации, данные величины сохраняют свои значения в момент до и после коммутации, что существенно упрощает алгоритм вычислений.

Перед началом расчета задаются величиной расчетного шага по времени  $h$ , величина которого должна быть достаточно мала, чтобы за данный промежуток времени значения искомых величин  $u_n(t)$  и  $i_m(t)$  были, практически, постоянны. Критерием выполнения этого условия

является достижение малости величины  $h$ , по сравнению со всеми величинами времен релаксации цепи  $\tau_1, \dots, \tau_{n+m}$ , количество которых равно количеству накопителей электроэнергии в данной цепи (то есть – суммарному количеству конденсаторов и катушек индуктивности).

На практике данное условие выражается следующим образом:

$$h \approx \frac{5 \cdot \min(\tau_1, \dots, \tau_{n+m})}{50 \dots 100} = \frac{\min(\tau_1, \dots, \tau_{n+m})}{10 \dots 20} \quad (3.2).$$

Выполнение условия (3.2) означает, что за время, равное минимальной из величин  $\tau_1, \dots, \tau_{n+m}$ , происходит от 10 до 20 расчетных шагов программы.

Более точный выбор числа расчетных шагов зависит от требований, предъявляемых к точности расчета. Однако при этом следует помнить, что неоправданное уменьшение величины расчетного шага приводит к увеличению массивов данных и росту объема памяти вычислительного устройства, обеспечивающего данный расчет.

После выбора величины  $h$ , становится возможным записать выражения для производных напряжений (или токов) по методу конечных разностей:

$$u_k' = \frac{u_{k+1} - u_k}{h} \quad (3.3).$$

Выражение (3.3) означает, что для отыскания значения напряжения в момент времени  $k + 1$  следует знать значение напряжения и его производной, в момент времени  $k$ . В этом случае, исходя из (3.3), значение  $u_{k+1}$  может быть определено согласно выражению:

$$u_{k+1} = hu_k' + u_k \quad (3.4).$$

Выражения, подобные (3.4), в которых  $k+1$ -е значение некоторой может быть определено при помощи ее  $k$ -го значения называются *рекуррентными*.

Так, например, если известны значения напряжения и скорости его изменения в начальный момент времени, то значение напряжения на 1-м расчетном шаге будет определяться, согласно (3.4), следующим образом:

$$u_1 = hu_0' + u_0.$$

Далее, следует произвести отыскание величины производной напряжения на 1-м расчетном шаге  $u_1'$  и определить величину  $u_2$ . После

чего, расчет повторяется  $N$  шагов, - до тех пор, пока величина  $N \cdot h$  не достигнет требуемого расчетного времени протекания переходных процессов.

### Контрольная работа №1

Для всех контрольных работ номер варианта соответствует номеру фамилии обучающегося в списке группы.

Для электрической цепи, заданной в варианте, выполнить следующие расчеты:

- 1) определить передаточную характеристику  $w_0(j\omega)$  для режима холостого хода;
- 2) рассчитать и построить ЛАЧХ цепи  $A_0(f)$  в заданном частотном диапазоне;
- 3) определить передаточную характеристику  $w(j\omega)$  при подключении нагрузки;
- 4) рассчитать и построить ЛАЧХ цепи  $A(f)$  в заданном частотном интервале, при заданном сопротивлении нагрузки.

#### Пример расчета

Произведем требуемые расчеты для цепи, изображенной на рис. К.1.1, со следующими параметрами:  $R_1 = 30 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 100 \text{ Ом}$ ;  $C_1 = 2 \text{ мкФ}$ ;  $C_2 = 0,6 \text{ мкФ}$ ;  $R_n = 200 \text{ Ом}$ ; интервал частот от 100 Гц до 10 кГц.

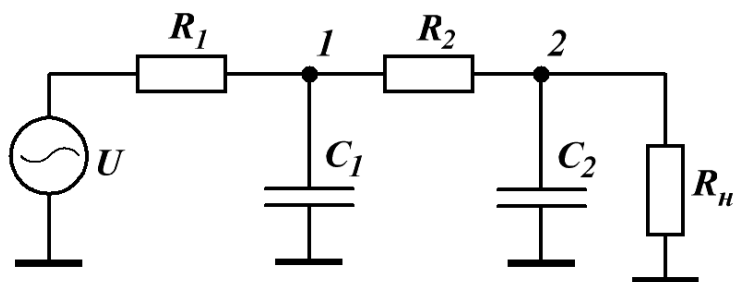


Рис. К.1.1

- 1) Определение передаточной характеристики  $w_0(j\omega)$  для режима холостого хода

Для отыскания функции  $w_0(j\omega)$  следует записать систему уравнений для комплексов потенциалов  $\varphi_1, \varphi_2$  в режиме холостого хода, согласно методу узловых потенциалов. Для упрощения выражений, вместо сопротивлений  $R_1, R_2$ , удобнее использовать соответствующие величины проводимостей  $g_1, g_2$ .

$$\begin{pmatrix} g_1 + g_2 + j\omega C_1 & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + j\omega C_2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U} g_1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда, комплекс потенциала  $\varphi_2$ :

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\begin{vmatrix} g_1 + g_2 + j\omega C_1 & \dot{U} g_1 \\ -g_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1 + g_2 + j\omega C_1 & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + j\omega C_2 \end{vmatrix}}.$$

Упрощая это выражение, согласно методу Крамера, получим:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{U} g_1 g_2}{(g_1 + g_2 + j\omega C_1)(g_2 + j\omega C_2) - g_2^2}.$$

Тогда, передаточная функция  $w_0(j\omega)$ , -

$$w_0(j\omega) = \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{U}} = \frac{g_1 g_2}{(g_1 + g_2 + j\omega C_1)(g_2 + j\omega C_2) - g_2^2}.$$

Производя алгебраические преобразования, получим:

$$w_0(j\omega) = \frac{g_1 g_2}{g_1 g_2 - \omega^2 C_1 C_2 + j\omega(g_2 C_1 + (g_1 + g_2) C_2)}$$

- 2) Определение функции  $A_0(f)$  и построение ЛАЧХ цепи в режиме холостого хода

Согласно определению, ЛАЧХ цепи  $A_0(f)$ , -

$$A_0(f) = 20 \lg \left( \frac{g_1 g_2}{\sqrt{(g_1 g_2 - \omega^2 C_1 C_2)^2 + \omega^2 (g_2 C_1 + (g_1 + g_2) C_2)^2}} \right).$$

ЛАЧХ цепи для режима холостого хода  $A_0(f)$  в заданном частотном интервале показана на рис. К.1.2.

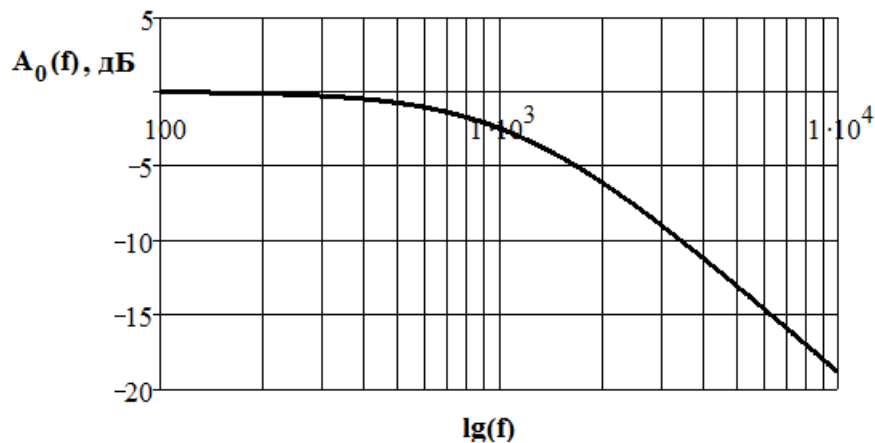


Рис. К.1.2

Важные замечания:

- построение функции  $A_0(f)$  следует производить при помощи прикладного программного пакета (например, Microsoft Excel);
- при построении ЛАЧХ, для каждой декады принято задаваться следующими значениями: 1; 2; 3; 5; 7; таким образом, заданному в задаче частотному диапазону, будут соответствовать следующие частоты: 100 Гц; 200 Гц; 300 Гц; 500 Гц; 700 Гц; 1 кГц; 2 кГц; 3 кГц; 5 кГц; 7 кГц; 10 кГц.

### 3) Определение передаточной характеристики $w(j\omega)$ при подключении нагрузки

Для отыскания функции  $w(j\omega)$  следует, также, записать систему уравнений для комплексов потенциалов  $\varphi_1, \varphi_2$ , согласно методу узловых потенциалов. Однако теперь следует учесть, что для 2-го узла добавилась проводимость нагрузки  $g_n$ .

$$\begin{pmatrix} g_1 + g_2 + j\omega C_1 & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + g_n + j\omega C_2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U} g_1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда, комплекс потенциала  $\varphi_{2,н}$ :

$$\dot{\varphi}_{2,н} = \frac{\begin{vmatrix} g_1 + g_2 + j\omega C_1 & \dot{U}g_1 \\ -g_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1 + g_2 + j\omega C_1 & -g_2 \\ -g_2 & g_2 + g_н + j\omega C_2 \end{vmatrix}}.$$

Упрощая это выражение, согласно методу Крамера, получим:

$$\dot{\varphi}_{2,н} = \frac{\dot{U}g_1g_2}{(g_1 + g_2 + j\omega C_1)(g_2 + g_н + j\omega C_2) - g_2^2}.$$

Передаточная функция  $w(j\omega)$ , -

$$w(j\omega) = \frac{\dot{\varphi}_{2,н}}{\dot{U}} = \frac{g_1g_2}{(g_1 + g_2 + j\omega C_1)(g_2 + g_н + j\omega C_2) - g_2^2}.$$

Производя алгебраические преобразования, получим:

$$w(j\omega) = \frac{g_1g_2}{g_1g_2 + (g_1 + g_2)g_н - \omega^2 C_1 C_2 + j\omega((g_2 + g_н)C_1 + (g_1 + g_2)C_2)}$$

- 4) Определение функции  $A(f)$  и построение ЛАЧХ цепи в режиме с подключенной нагрузкой

Согласно определению, ЛАЧХ цепи  $A(f)$ , -

$$A(f) = 20\lg(K(f)),$$

где

$$K(f) = \frac{g_1g_2}{\sqrt{(g_1g_2 + (g_1 + g_2)g_н - \omega^2 C_1 C_2)^2 + \omega^2((g_2 + g_н)C_1 + (g_1 + g_2)C_2)^2}}.$$

ЛАЧХ цепи для режима холостого хода  $A_0(f)$  и режима под нагрузкой  $A(f)$  показаны на рис. К.1.3.

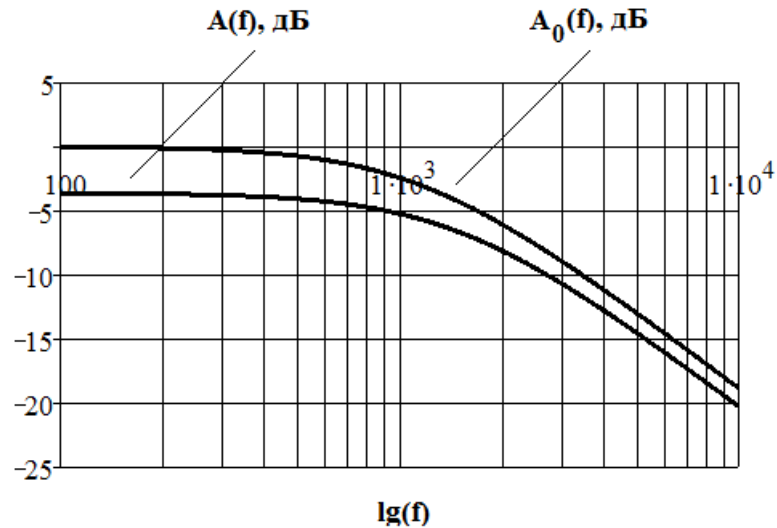


Рис. К.1.3

Результатами расчета являются:

- 1) выражение для передаточной характеристики  $w_0(j\omega)$  для режима холостого хода;
- 2) график ЛАЧХ цепи  $A_0(f)$  в заданном частотном диапазоне;
- 3) выражение передаточной характеристики  $w(j\omega)$  при подключении нагрузки;
- 4) графики ЛАЧХ цепи  $A(f)$  и  $A_0(f)$  в заданном частотном интервале.

Электрические схемы для расчета к КР №1



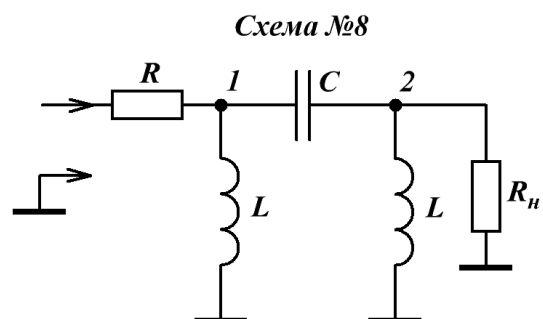
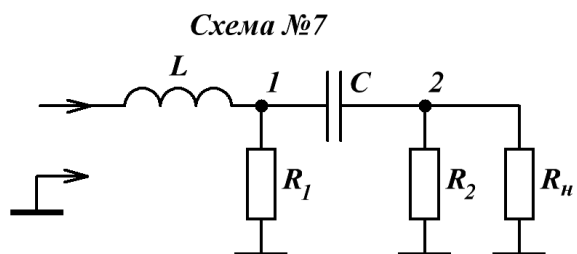
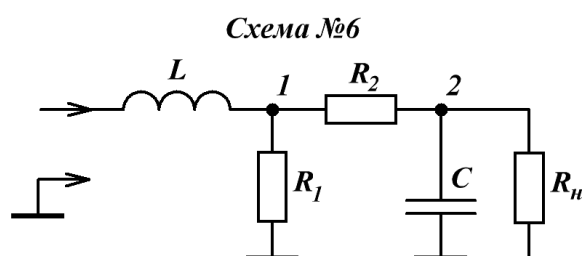
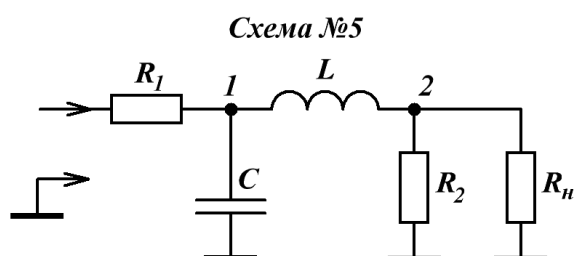
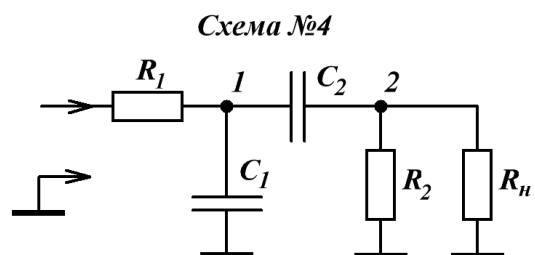
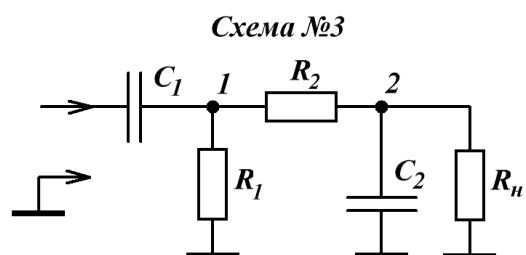
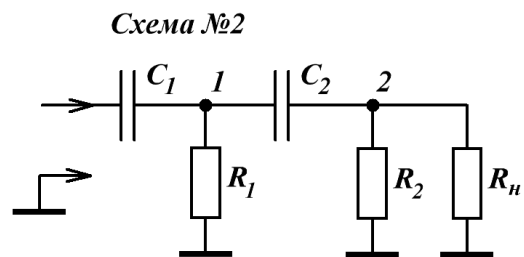
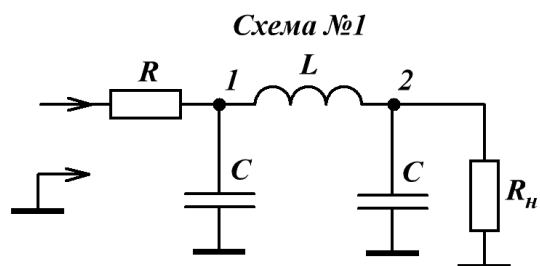


Табл. К.1.1 Данные вариантов к КР №1

№ вар	№ схемы	Параметры схемы						Частотный диапазон	
		R <sub>1</sub> , Ом	R <sub>2</sub> , Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	C <sub>2</sub> , мкФ	L, мГн	R <sub>н</sub> , Ом	f <sub>min</sub> , Гц	f <sub>max</sub> , Гц
1	1	30	-	3	3	10	150	100	5·10 <sup>3</sup>
2	2	510	750	0,5	0,33	-	1000	200	10 <sup>4</sup>
3	3	200	330	10	4,7	-	900	10	10 <sup>3</sup>
4	4	100	1000	0,5	0,1	-	1000	100	10 <sup>5</sup>
5	5	30	1000	1	-	10	750	300	3·10 <sup>4</sup>
6	6	470	20	2	-	10	200	100	5·10 <sup>3</sup>
7	7	300	300	2	-	15	400	10	5·10 <sup>4</sup>
8	8	51	-	0,3	-	12	900	500	3·10 <sup>4</sup>
9	1	40	-	0,3	0,3	20	500	200	10 <sup>4</sup>
10	2	300	470	3	0,5	-	500	100	10 <sup>4</sup>
11	3	510	200	3	1	-	900	10	10 <sup>4</sup>
12	4	100	510	5,1	2	-	700	10	10 <sup>4</sup>
13	5	50	700	0,3	-	5	750	10 <sup>3</sup>	5·10 <sup>4</sup>
14	6	510	10	0,3	-	10	400	100	10 <sup>4</sup>
15	7	510	750	0,2	-	12	900	30	10 <sup>5</sup>
16	8	12	-	3	-	10	300	200	5·10 <sup>3</sup>
17	1	40	-	0,1	0,1	10	800	300	2·10 <sup>4</sup>
18	2	200	330	10	5	-	500	10	10 <sup>3</sup>
19	3	300	150	0,5	0,1	-	600	100	10 <sup>5</sup>
20	4	51	750	10	2	-	900	10	5·10 <sup>3</sup>
21	5	50	300	20	-	10	100	10	3·10 <sup>3</sup>
22	6	910	20	0,02	-	10	1000	10 <sup>3</sup>	5·10 <sup>4</sup>
23	7	1000	900	0,03	-	2	900	100	10 <sup>6</sup>
24	8	12	-	12	-	12	100	100	5·10 <sup>3</sup>

Ниже, в табл. К.1.2 (для самопроверки), для каждого из вариантов приведены «контрольные» частоты (f<sub>к</sub>) с указанием соответствующих уровней передачи в режиме холостого хода и с подключенной нагрузкой.

Табл. К.1.2 Данные для самопроверки к КР №1

№ вар	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_k$ , Гц	1000	1000	20	1000	$10^4$	700	200	2000
$A_0(f_k)$ , дБ	6,08	- 5,78	- 12,9	- 6,22	- 8	3,68	- 4,18	2,35
$A(f_k)$ , дБ	0,84	- 8,86	- 16,5	- 11,1	- 11,5	1,34	- 7,73	1,05
№ вар	9	10	11	12	13	14	15	16
$f_k$ , Гц	2000	800	50	100	$2 \cdot 10^4$	2000	700	900
$A_0(f_k)$ , дБ	15,54	- 3,27	- 7,93	- 6,45	- 9,1	4,59	- 4,97	13,7
$A(f_k)$ , дБ	3,56	- 6,97	- 12,1	- 10,2	- 12,5	1,81	- 9,11	7,91
№ вар	17	18	19	20	21	22	23	24
$f_k$ , Гц	5000	50	200	100	700	$10^4$	1000	500
$A_0(f_k)$ , дБ	17,86	- 13,9	- 14,7	- 4,03	- 13,2	2,6	- 15,5	5,88
$A(f_k)$ , дБ	5,68	- 17,6	- 19,5	- 7,56	- 14,1	- 2,76	- 21,4	2,44

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ к КР №1

1. Что такое индуктивное и емкостное сопротивления?
2. В чем отличие активного и реактивного сопротивления?
3. Чем определяется комплекс напряжения?
4. Могут ли, в практических цепях, два комплекса напряжения иметь одинаковые модули?
5. Запишите выражение, определяющее модуль полного сопротивления цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора  $R$  и конденсатора  $C$ , на заданной частоте  $f$ .
6. Запишите выражение, определяющее сдвиг фаз  $\varphi$  между напряжением и током в цепи, заданной в вопросе №5. Как изменится величина сдвига фаз, при увеличении частоты источника напряжения?
7. Запишите выражение, определяющее активную мощность  $P$ , выделяющуюся в цепи, заданной в вопросе №5, при подаче на нее напряжения синусоидальной формы с действующим значением, равным  $U$ .
8. Источник переменного синусоидального напряжения величиной  $U$  с внутренним сопротивлением  $r$  работает на нагрузку с сопротивлением  $Z = R + jX$ . Запишите выражение, определяющее падение напряжения на нагрузке в номинальном режиме работы источника.

9. Используя данные вопроса №8, запишите активную мощность, выделяемую в нагрузке, в номинальном режиме работы.
10. Используя данные вопроса №8, запишите реактивную мощность, выделяемую в нагрузке, в номинальном режиме работы.

## Контрольная работа №2

Для временной зависимости источника периодического несинусоидального напряжения, заданного в варианте, выполнить следующие расчеты:

- 1) построить временную зависимость источника напряжения  $u(t)$ ;
- 2) определить спектральные составляющие сигнала, с точностью до 3-й гармоники (включительно);
- 3) воспользовавшись программным пакетом Microsoft Excel (или другим программным пакетом), построить временную зависимость исходного сигнала, исходя из рассчитанных спектральных составляющих;
- 4) определить спектр сигнала на выходе линейного четырехполюсника, заданного в варианте;
- 5) воспользовавшись программным пакетом Microsoft Excel (или другим программным пакетом), построить временную зависимость сигнала на выходе четырехполюсника, исходя из рассчитанных спектральных составляющих.

### Пример расчета

Основная частота сигнала  $f = 2000$  Гц; параметры линейного электрической цепи:  $R = 100$  Ом;  $C = 1$  мкФ;  $R_n = 700$  Ом.

Временная зависимость сигнала представлена в табл. К.2.1; схема показана на рис. К.2.2.

Табл. 8.2.1 Временная зависимость источника напряжения

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_k$ , В	0,586	0,76	0,942	1,113	1,243	1,293	1,243	1,113	0,942	0,76
k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$u_k$ , В	0,586	0,43	0,302	0,207	0,149	0,129	0,149	0,207	0,302	0,43

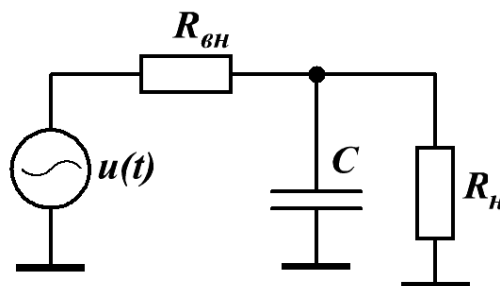


Рис. К.2.1

### 1) Построение временной зависимости источника напряжения

Временная зависимость источника периодического несинусоидального напряжения показана на рис. К.2.2. Построение зависимости рекомендуется производить при помощи прикладного пакета (например, - Microsoft Excel).

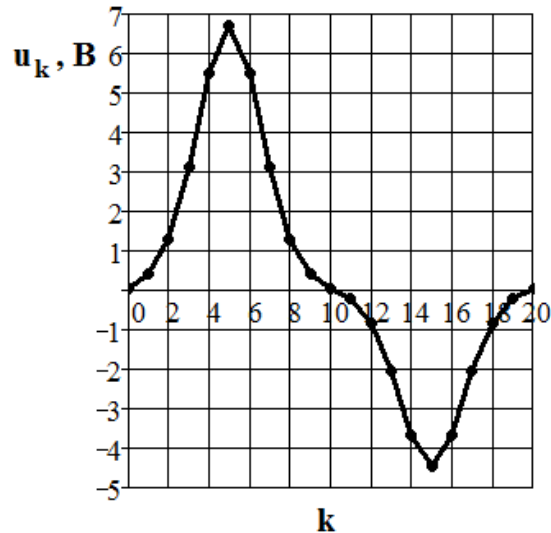


Рис. К.2.2

### 2) Расчет спектральных составляющих сигнала

Расчет производится известным, в курсе теоретических основ электротехники, методом быстрого преобразования Фурье (БПФ) с заданными величинами количества разбиений ( $N = 20$ ) и расчетного шага  $h = 0,05$ .

Постоянная составляющая сигнала  $U_0$ :

$$U_0 = \frac{1}{20} \sum_{k=0}^{19} u_k \quad (\text{К. 2.1}).$$

Амплитуды  $n$ -х гармоник «синусных» составляющих сигнала  $A_n$ :

$$A_n = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{19} u_k \sin(2\pi n(kh)) \quad (\text{К. 2.2}).$$

Амплитуды  $n$ -х гармоник «косинусных» составляющих сигнала  $B_n$ :

$$B_n = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{19} u_k \cos(2\pi n(kh)) \quad (\text{К. 2.3}).$$

Комплексы амплитуд  $n$ -й гармоники:

$$\dot{U}_{m,n} = A_n + jB_n \quad (\text{К. 2.4}).$$

Тогда, амплитуды  $U_{m,n}$  и начальные фазы  $\varphi_n$   $n$ -й гармоники:

$$U_{m,n} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (\text{К. 2.5});$$

$$\varphi_n = \arctg\left(\frac{B_n}{A_n}\right) \quad (\text{К. 2.6}).$$

Временная зависимость сигнала  $u(t)$  может быть представлена следующим выражением:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^3 [U_{m,n} \sin(2\pi nft + \varphi_n)] \quad (\text{К. 2.7}),$$

где  $f$  – основная частота сигнала.

Действующее значение переменной составляющей сигнала  $U$  (измеряемое вольтметром) может быть рассчитано по формуле:

$$U = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{k=0}^{19} (u_k - U_0)^2} \quad (\text{К. 2.8}).$$

Действующее значение переменной составляющей сигнала, определяемое рассчитанными амплитудами гармоник  $U_{\text{расч}}$ , определяется по формуле:

$$U_{\text{расч}} = \sqrt{\frac{U_{m,1}^2}{2} + \frac{U_{m,2}^2}{2} + \frac{U_{m,3}^2}{2}} \quad (\text{К. 2.9}).$$

Символическим представлением данного сигнала является суперпозиция следующих ЭДС:

$$U_0 + U_1 e^{j\varphi_1} + U_2 e^{j\varphi_2} + U_3 e^{j\varphi_3} \quad (\text{К. 2.10}).$$

### 3) Расчет спектральных составляющих сигнала

Можно показать, что заданный в примере сигнал содержит только «синусные» составляющие нечетных гармоник и «косинусные» составляющие четных гармоник.

Учитывая спектральный состав сигнала, необходимо заполнить нижеследующую таблицу (Табл. К.2.2).

Табл. К.2.2 Расчет спектрального состава сигнала

k	$u_k, B$	$(u_k - U_0)^2$	$\sin(2\pi(kh))$	$u_k \cdot \sin(2\pi(kh))$	$\cos(4\pi(kh))$	$u_k \cdot \cos(4\pi(kh))$	$\sin(6\pi(kh))$	$u_k \cdot \sin(6\pi(kh))$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0	0,586		0		1		0	
1	0,76		0,309		0,809		0,809	
2	0,942		0,588		0,309		0,951	
3	1,113		0,809		- 0,309		0,309	
4	1,243		0,951		- 0,809		- 0,588	
5	1,293		1		- 1		- 1	
6	1,243		0,951		- 0,809		- 0,588	
7	1,113		0,809		- 0,309		0,309	
8	0,942		0,588		0,309		0,951	
9	0,76		0,309		0,809		0,809	
10	0,586		0		1		0	
11	0,43		- 0,309		0,809		- 0,809	
12	0,302		- 0,508		0,309		- 0,951	
13	0,207		- 0,809		- 0,309		- 0,309	
14	0,149		- 0,951		- 0,809		0,588	
15	0,129		- 1		- 1		1	
16	0,149		- 0,951		- 0,809		0,588	
17	0,207		- 0,809		- 0,309		- 0,309	
18	0,302		- 0,588		0,309		- 0,951	
19	0,43		- 0,309		0,809		- 0,809	
$\Sigma$								

После того, как 2-й, 4-й, 6-й и 8-й столбцы таблицы будут заполнены, следует просуммировать значения в этих столбцах, подставив эти суммы в формулы (К.2.1) – (К.2.3).

Комплексы амплитуд  $n$ -й гармоники, согласно (К.2.4):

$$\dot{U}_{m,1} = 3,98 + j0 \text{ В}; \dot{U}_{m,2} = 0 - j0,517 \text{ В}; \dot{U}_{m,3} = -1,362 + j0 \text{ В}.$$

Амплитуды  $U_{m,n}$  и начальные фазы  $\varphi_n$ , согласно формулам (К.2.5) и (К.2.6):



$$U_{m,1} = 3,98 \text{ В}; U_{m,2} = 0,517 \text{ В}; U_{m,3} = 1,362 \text{ В};$$

$$\varphi_1 = 0^\circ; \varphi_2 = -90^\circ; \varphi_3 = 180^\circ.$$

Временная зависимость сигнала, согласно (8.2.7):

$$u(t) = 0,455 + 3,98\sin(2\pi ft) - 0,517\cos(4\pi ft) - 1,362\sin(6\pi ft).$$

Действующее значение переменной составляющей сигнала  $U$  (измеряемое вольтметром), согласно формуле (К.2.8):

$$U = 3 \text{ В}.$$

Действующее значение переменной составляющей сигнала, определяемое рассчитанными амплитудами гармоник  $U_{\text{расч}}$ , согласно формуле (К.2.9):

$$U_{\text{расч}} = \sqrt{\frac{(3,98)^2}{2} + \frac{(0,517)^2}{2} + \frac{(1,362)^2}{2}} = 2,998 \text{ В}.$$

Очевидное выполнение условия

$$U_{\text{расч}} \approx U$$

означает хорошее приближение при представлении спектра сигнала, с точностью до 3-й гармоники.

Символическое представление сигнала, согласно (8.2.10):

$$0,455 + \frac{3,98}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} + \frac{0,517}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} + \frac{1,362}{\sqrt{2}} e^{j180^\circ}.$$

Производя расчеты, получим соответствующие комплексы действующих значений:

$$2,816e^{j0^\circ}; 0,366e^{-j90^\circ}; 0,963e^{j180^\circ}.$$

- 4) Построение временной зависимости  $u(t)$  по рассчитанному спектру сигнала

Временная зависимость  $u(t)$ , построенная по рассчитанному спектру, представлена на рис. К.2.3 (построение произведено при помощи программного пакета).

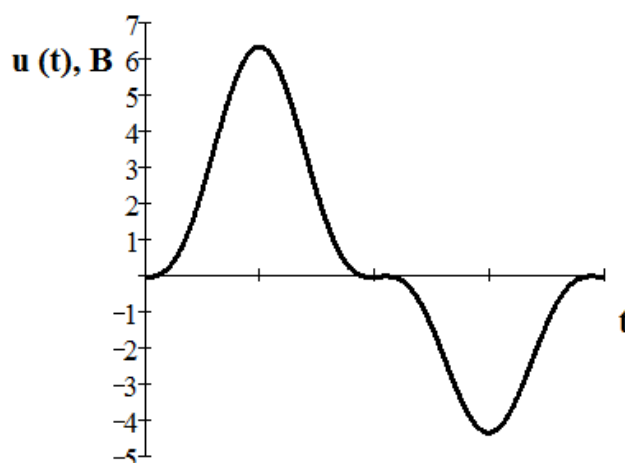


Рис. К.2.3

Сравнение рис. К.2.2 и К.2.3 показывает адекватное представление заданного сигнала данным спектральным рядом.

#### б) Определение спектра сигнала на выходе линейного четырехполюсника

Решим эту задачу методом суперпозиции: будем полагать, что суммарный отклик цепи складывается из откликов для каждой гармонической составляющей. Такой подход вполне оправдан, поскольку четырехполюсник является линейным.

Запишем передаточную функцию четырехполюсника, аналогично тому, как это делалось в контрольной работе №1.

$$w(j\omega) = \frac{g_{BH}}{g_{BH} + g_H + j\omega C}.$$

Переведем функцию  $w(j\omega)$  в показательную форму:

$$\begin{aligned} w(j\omega) &= \frac{g_{BH}(g_{BH} + g_H - j\omega C)}{(g_{BH} + g_H)^2 + (\omega C)^2} = \frac{g_{BH}(g_{BH} + g_H) - j\omega g_{BH} C}{(g_{BH} + g_H)^2 + (\omega C)^2} = \\ &= \frac{g_{BH}(g_{BH} + g_H)}{(g_{BH} + g_H)^2 + (\omega C)^2} - j \frac{\omega g_{BH} C}{(g_{BH} + g_H)^2 + (\omega C)^2} = \\ &= \frac{g_{BH}}{\sqrt{(g_{BH} + g_H)^2 + (\omega C)^2}} e^{-j \arctg\left(\frac{\omega C}{g_{BH} + g_H}\right)}. \end{aligned}$$

По определению передаточной функции, -

$$w(j\omega) = \frac{\dot{U}_{ВЫХ}(j\omega)}{\dot{U}(j\omega)}.$$

Значит, выходное напряжение  $n$ -й гармоники:

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ},n}(jn\omega) = w(jn\omega)\dot{U}_n(jn\omega).$$

Комплекс выходного напряжения 1-й гармоники:

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ},1} = \frac{g_{\text{ВН}} 2,816 e^{j0^\circ}}{\sqrt{(g_{\text{ВН}} + g_{\text{Н}})^2 + (\omega C)^2}} e^{-j \arctg\left(\frac{\omega C}{g_{\text{ВН}} + g_{\text{Н}}}\right)} = 1,66 e^{-j48^\circ} \text{ В};$$

Комплекс выходного напряжения 2-й гармоники:

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ},2} = \frac{g_{\text{ВН}} 0,366 e^{-j90^\circ}}{\sqrt{(g_{\text{ВН}} + g_{\text{Н}})^2 + (2\omega C)^2}} e^{-j \arctg\left(\frac{2\omega C}{g_{\text{ВН}} + g_{\text{Н}}}\right)} = 0,132 e^{-j156^\circ} \text{ В};$$

Комплекс выходного напряжения 3-й гармоники:

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ},3} = \frac{g_{\text{ВН}} 0,963 e^{j180^\circ}}{\sqrt{(g_{\text{ВН}} + g_{\text{Н}})^2 + (3\omega C)^2}} e^{-j \arctg\left(\frac{3\omega C}{g_{\text{ВН}} + g_{\text{Н}}}\right)} = 0,244 e^{j107^\circ} \text{ В};$$

Постоянная составляющая на выходе четырехполюсника:

$$U_{\text{ВЫХ},0} = \frac{g_{\text{ВН}} U_0}{g_{\text{ВН}} + g_{\text{Н}}} = 0,398 \text{ В}.$$

В результате, получим следующую аналитическую зависимость для напряжения на выходе четырехполюсника:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = 0,398 + 2,344 \sin(2\pi f t - 48^\circ) + 0,187 \cos(4\pi f t - 156^\circ) + 0,462 \sin(6\pi f t + 107^\circ).$$

Временная зависимость сигнала на выходе четырехполюсника представлена на рис. К.2.4.

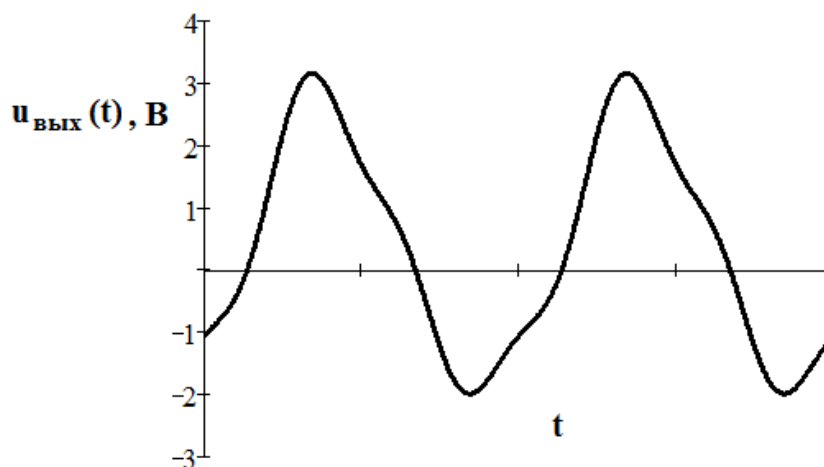


Рис. К.2.4

Табл. К.2.3 Данные вариантов к КР №2

№ вар	№ сигнала	№ схемы	f, Гц	R <sub>вн</sub> , Ом	L, мГн	C, мкФ	R <sub>н</sub> , Ом
1	1	1	1000	100	-	2	500
2	2	1	500	65	-	9,1	500
3	3	1	500	75	-	7,5	700
4	4	1	600	60	-	7,5	400
5	5	1	300	55	-	10	350
6	6	1	4000	150	-	0,5	800
7	7	2	1800	50	10	0,6	∞
8	8	2	1700	100	10	0,16	∞
9	1	2	2500	50	10	0,1	∞
10	2	2	800	20	5	5	∞
11	3	2	500	20	7	12	∞
12	4	2	300	15	7	15	∞
13	5	3	300	150	-	1	300
14	6	3	150	100	-	2	300
15	7	3	100	100	-	3	400
16	8	3	800	100	-	0,2	800
17	1	3	1200	70	-	0,1	450
18	2	3	2000	70	-	0,051	500
19	3	4	6000	70	9	0,1	∞
20	4	4	2000	40	9	0,2	∞
21	5	4	3000	35	8	0,33	∞
22	6	4	1000	35	8	0,33	∞
23	7	4	2000	25	7	0,47	∞
24	8	4	1800	25	7	1	∞

Важное замечание: для сигналов №№ 1, 2, 5, 6, 7, 8, как и в показательном примере, присутствуют только «синусные» составляющие нечетных гармоник и «косинусные» составляющие четных гармоник; сигналы №3 и №4 содержат «синусные» и «косинусные» составляющие для всех гармоник, без исключения!

Табл. К.2.4 Временные зависимости сигналов для 1-го периода

k	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8
0	0,586	1,034	0	0	0	0	4,433	5,542
1	0,401	0,783	1,967	2,433	1,143	1,206	3,357	4,196
2	0,251	0,609	3,161	3,682	2,052	2,164	2,612	3,265
3	0,141	0,499	3,884	4,323	2,728	2,782	2,141	2,676
4	0,073	0,44	4,323	4,653	3,153	3,103	1,884	2,355
5	0,051	0,421	4,59	4,822	3,3	3,2	1,802	2,253
6	0,073	0,44	4,751	4,908	3,153	3,103	1,884	2,355
7	0,141	0,499	4,849	4,953	2,728	2,782	2,141	2,676
8	0,251	0,609	4,908	4,966	2,052	2,164	2,612	3,265
9	0,401	0,783	4,944	3,012	1,143	1,206	3,357	4,196
10	0,586	1,034	4,966	1,827	0	0	4,433	5,542
11	0,798	1,336	3,012	1,108	-1,353	-1,201	5,855	7,319
12	1,029	1,756	1,827	0,672	-2,812	-2,092	7,525	9
13	1,263	2,143	1,108	0,408	-4,168	-2,525	9	9
14	1,463	2,435	0,672	0,247	-5,143	-2,613	9	9
15	1,553	2,544	0,408	0,15	-5,5	-2,6	9	9
16	1,463	2,435	0,247	0,091	-5,143	-2,613	9	9
17	1,263	2,143	0,15	0,055	-4,168	-2,525	9	9
18	1,029	1,756	0,091	0,033	-2,812	-2,092	7,525	9
19	0,798	1,366	0,055	0,02	-1,353	-1,201	5,855	7,319

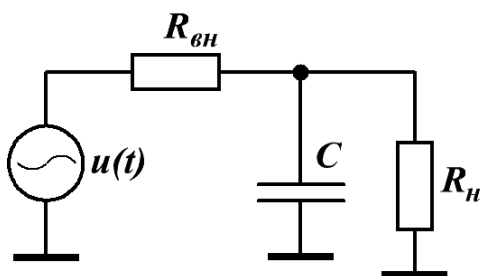
Ниже, в табл. К.2.5 (для самопроверки), для каждого из вариантов приведены «контрольные» значения действующих значений переменной составляющей напряжения на входе и выходе четырехполюсника.

Табл. К.2.5 Данные для самопроверки к контрольной работе №2

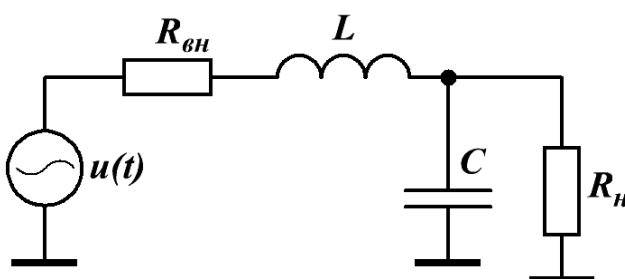
№ вар	1	2	3	4	5	6	7	8
$U_{вх}, В$	0,51	0,745	1,97	1,99	3,07	2,26	2,8	2,74
$U_{вых}, В$	0,29	0,332	0,92	0,946	1,96	1	6,73	3,28
№ вар	9	10	11	12	13	14	15	16
$U_{вх}, В$	0,51	0,745	1,97	2	3,07	2,26	2,81	2,74
$U_{вых}, В$	0,816	1,17	2,49	2,58	1,02	1,03	1,55	1,2
№ вар	17	18	19	20	21	22	23	24
$U_{вх}, В$	0,51	0,745	1,97	1,99	3,07	2,26	2,8	2,74
$U_{вых}, В$	0,165	0,234	6,42	2,16	12,6	0,85	2,95	8,05

## Электрические схемы для расчета к КР №2

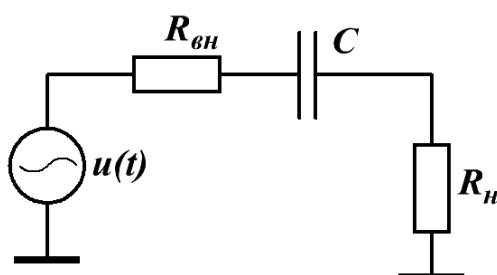
*Схема №1*



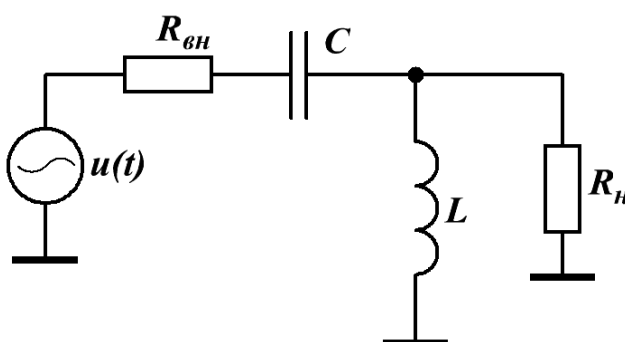
*Схема №2*



*Схема №3*



*Схема №4*



Ниже приведены передаточные характеристики для сигналов №2, №3, №4 (передаточная характеристика для сигнала №1 выводится в показательном примере).

$$w_2(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (R_{\text{вн}}C\omega)^2}} e^{-j\arctg\left(\frac{R_{\text{вн}}C\omega}{1 - LC\omega^2}\right)};$$

$$w_3(j\omega) = \frac{R_{\text{н}}}{\sqrt{(R_{\text{н}} + R_{\text{вн}})^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\arctg\left(\frac{1}{(R_{\text{н}} + R_{\text{вн}})C\omega}\right)};$$

$$w_4(j\omega) = \frac{LC\omega^2}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (R_{\text{вн}}C\omega)^2}} e^{j\arctg\left(\frac{R_{\text{вн}}C\omega}{LC\omega^2 - 1}\right)}.$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ к КР №2

1. Дайте определение понятию спектра электрического сигнала.
2. Какими особенностями обладают спектры периодических сигналов, представимые в виде ряда Фурье?
3. Чему равна постоянная составляющая последовательности однополярных прямоугольных импульсов амплитудой 5 В, длительностью импульса 1 мс и частотой 200 Гц?
4. Может ли последовательность прямоугольных импульсов амплитудой 10 В не иметь постоянной составляющей  $U_0$ ?
5. Источник периодического синусоидального напряжения, работающий на частоте 250 Гц, нагружен на колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных резистора  $R = 20$  Ом, катушки индуктивности  $L = 20$  мГн и конденсатора  $C = 3$  мкФ. Для какой гармоники сигнала будет наблюдаться ситуация, близкая к резонансу?
6. Полное сопротивление RC-цепи на частоте 200 Гц составляет 100 Ом. Чему будет равно полное сопротивление этой цепи на частоте 300 Гц, если активное сопротивление цепи равно 60 Ом?
7. Экспериментальные измерения напряжения на нагрузке показали следующие результаты:  $U_0 = 3,3$  В;  $U = 4,6$  В. Каково оценочное значение амплитуды 1-й гармоники сигнала?
8. Сигнал, состоящий из постоянной составляющей  $U_0 = 2$  В и 1-й гармоники с амплитудой  $U_{m,1} = 1$  В и частотой  $f = 300$  Гц, подается на RC-цепь со следующими параметрами:  $R = 700$  Ом;  $C = 1$  мкФ. Определить показания амперметров постоянного и переменного тока, включенных в цепь нагрузки.
9. Для сигнала, спектр которого описан в примере №7, определить активные мощности постоянной и переменной составляющей тока  $P_0$  и  $P_{\sim}$ .
10. Сигнал, спектр которого описан в примере №7, поступает на активную нагрузку  $R = 1$  кОм. Определить полную активную мощность, выделяющуюся на нагрузке (постоянного и переменного тока).

### Контрольная работа №3

Для заданной в варианте электрической цепи, выполнить следующие расчеты:

- 1) записать рекуррентные соотношения для отыскания временных зависимостей переменных состояния (ПС);
- 2) определить временные зависимости ПС методом конечных разностей, с использованием пакета Microsoft Excel.

Поскольку характер переходных процессов существенно различен при периодическом и аperiodическом характерах, далее приведены два соответствующих примера расчета.

#### ПРИМЕР РАСЧЕТА №1 (апериодический переходный процесс)

Рассчитать временные зависимости для ПС, для цепи, изображенной на рис. К.3.1, со следующими параметрами:

$r$ , Ом	20
$R_1$ , Ом	100
$R_2$ , Ом	200
$R_3$ , Ом	300
$C$ , мкФ	60
$L$ , Гн	0,1

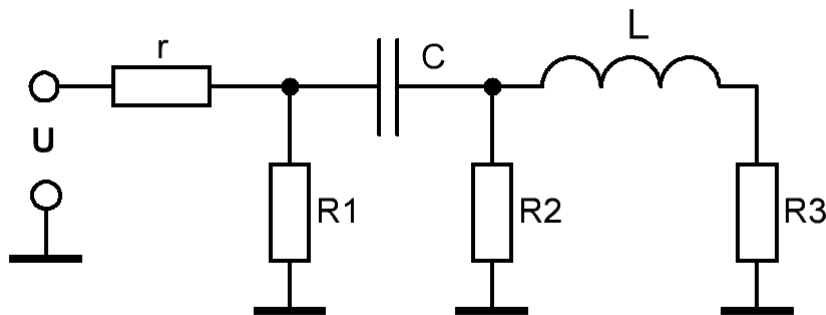


Рис. К.3.1 Схема для расчета ПС

#### 1.1 Упростим цепь, используя метод эквивалентного генератора (ЭГ).

Упрощенная схема цепи показана на рис. К.3.2.



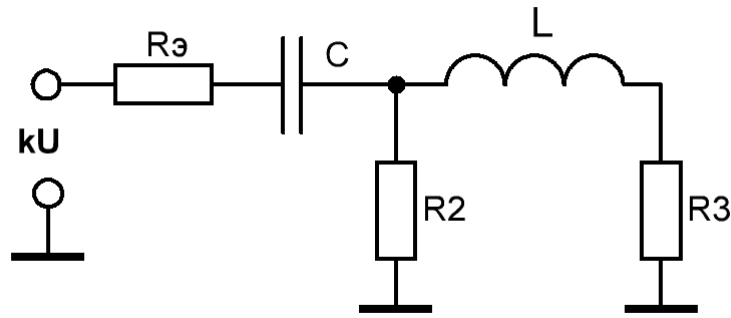


Рис. К.3.2 Схема для расчета ПС, упрощенная с использованием метода ЭГ

Согласно методу ЭГ, при использовании этой цепи сопротивление  $R_э$  будет определяться по формуле:

$$R_э = \frac{rR_1}{r + R_1} = \frac{20 \cdot 100}{20 + 100} = 16,7 \text{ (Ом)}.$$

Кроме того, для временной зависимости входного напряжения следует применить коэффициент преобразования, равный

$$k = \frac{R_1}{r + R_1} = \frac{100}{120} = 0,83.$$

После упрощения система уравнений для ПС примет вид:

$$kU = R_э Cu' + u + Li' + R_3 i \quad (K.3.1);$$

$$Cu' = \frac{kU - R_э Cu' - u}{R_2} + i \quad (K.3.2).$$

В этих уравнениях ПС – это напряжение на конденсаторе  $u$  и ток через катушку индуктивности  $i$ .

Преобразуем уравнение (K.3.2):

$$\begin{aligned} R_2 Cu' &= kU - R_э Cu' - u + R_2 i; \\ (R_2 C + R_э C)u' &= kU - u + R_2 i. \end{aligned}$$

Окончательный вариант для уравнения (K.3.2):

$$u' = \frac{kU - u + R_2 i}{(R_2 + R_э)C} \quad (K.3.3).$$

Преобразуем уравнение (K.3.1):

$$Li' = kU - R_э Cu' - u - R_3 i.$$

Окончательный вариант для уравнения (K.3.1):

$$i' = \frac{1}{L} (kU - R_э Cu' - u - R_3 i) \quad (K.3.4).$$

2. Найдем рекуррентные соотношения для уравнений (К.3.3) и (К.3.4) при помощи формул метода конечных разностей:

$$u'_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{h}; \quad i'_k = \frac{i_{k+1} - i_k}{h}.$$

Для уравнения (К.3.3) запишем:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \frac{kU - u_k + R_2 i_k}{(R_2 + R_3)C}.$$

Окончательно получим:

$$u_{k+1} = h \frac{kU - u_k + R_2 i_k}{(R_2 + R_3)C} + u_k \quad (К. 3.5).$$

Для уравнения (К.3.4) запишем:

$$\frac{i_{k+1} - i_k}{h} = \frac{1}{L} (kU - R_3 C u'_k - u_k - R_3 i_k).$$

Окончательно получим:

$$i_{k+1} = \frac{h}{L} (kU - R_3 C u'_k - u_k - R_3 i_k) + i_k \quad (К. 3.6).$$

### 3. Определим экспериментально величину шага вычисления $h$

Для отыскания величины  $h$  следует собрать заданную в варианте схему и подключить к ней источник прямоугольных импульсов, как это показано на рис. К.3.3

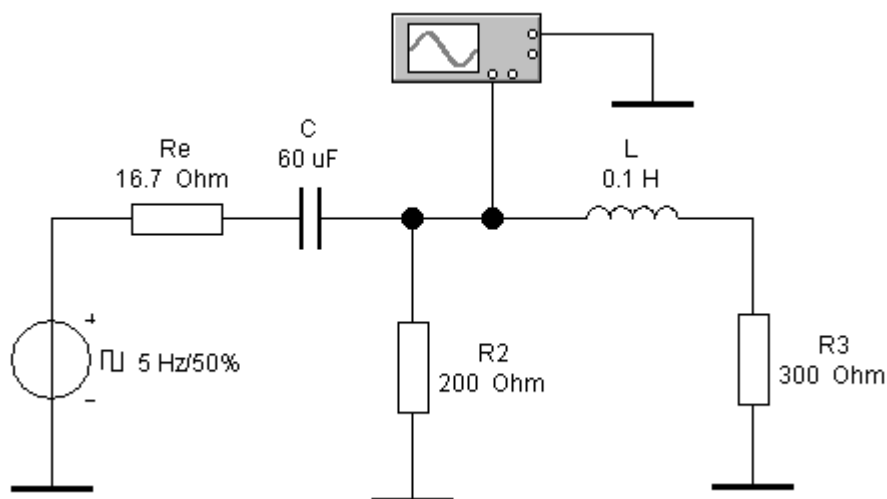


Рис. К.3.3 Схема для определения величины расчетного шага  $h$

Частоту следования импульсов следует подобрать экспериментально так, чтобы каждый импульс успевал релаксировать, к моменту поступления следующего. Как видно из рис. К.3.3, для

данной схемы это условие выполнилось при  $f = 5$  Гц, что показывает осциллограмма напряжения, приведенная на рис. К.3.4.

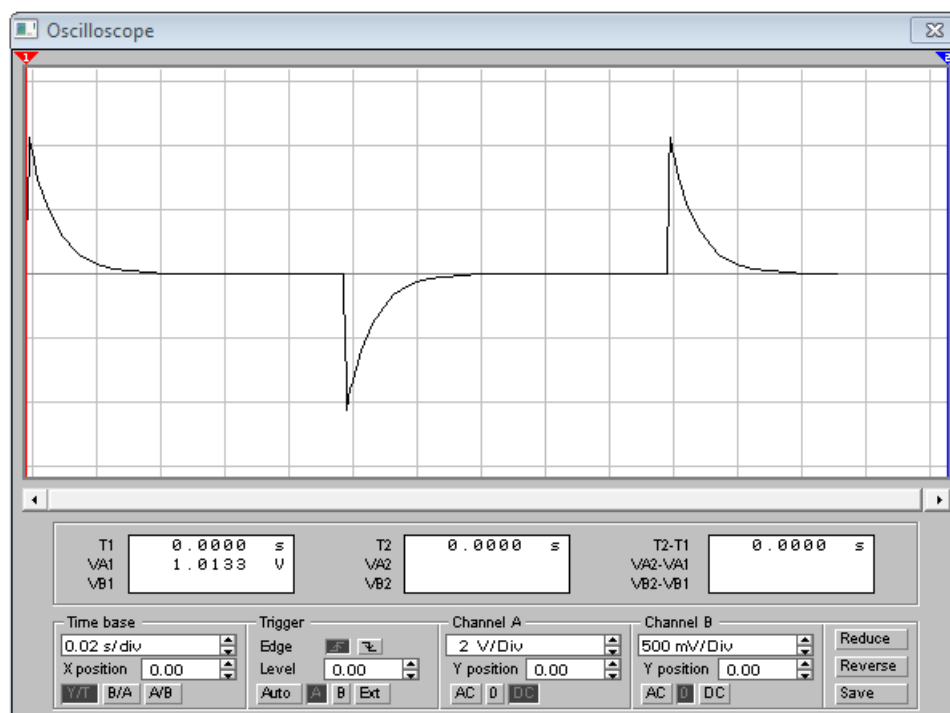


Рис. 4 Осциллограмма напряжения, снятая для экспериментальной схемы

Из рис. К.3.4 видно, что время переходного процесса приблизительно равно:

$$t_{nn} \approx 2 \text{ дел} \cdot 0,02 \frac{c}{\text{дел}} = 0,04 c = 40 \text{ мс.}$$

Значит, время релаксации переходного процесса:

$$\tau \approx \frac{t_{nn}}{5} = 8 \text{ мс.}$$

Тогда шаг вычисления  $h$  рассчитаем по формуле:

$$h = \frac{\tau}{50} = 0,16 \text{ мс.}$$

#### 4. Составим программу для расчета при помощи пакета Microsoft Excel

##### 4.1. Зададим константы вычисления, как это показано на рис. К.3.5

Здесь величина «kU» рассчитывается по формуле: «=B2\*B3».

Для введения числа, имеющего стандартный вид, следует использовать символ «е», так, например, для введения числа  $60 \cdot 10^{-6}$  следует ввести: «60e-6».

	A	B	C
1			
2	U =	5	
3	k =	0,83	
4	kU =	4,15	
5	Rэ =	16,7	
6	C =	6,00E-05	
7	R2 =	200	
8	L =	0,1	
9	R3 =	300	
10	h =	1,60E-07	
11			
12			

Рис. К.3.5 Задание констант в прикладном пакете Microsoft Excel

#### 4.2. Составим расчетную программу

Для составления расчетной программы необходимо ввести следующие формулы:

Формулу (К.3.5), вычисляющую напряжение на конденсаторе в следующий момент времени  $u_{k+1}$  по известному значению напряжения в предыдущий момент времени  $u_k$ :

$$u_{k+1} = h \frac{kU - u_k + R_2 i_k}{(R_2 + R_3)C} + u_k \quad (K. 3.5).$$

Формулу для определения производной напряжения на конденсаторе в данный момент времени:

$$u'_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{h}; \quad i'_k = \frac{i_{k+1} - i_k}{h}.$$

Формулу (К.3.6), вычисляющую значение тока на катушке в следующий момент времени  $i_{k+1}$  по известным значениям напряжения на конденсаторе в данный момент времени  $u_k$  и производной напряжения на конденсаторе  $u'_k$ :

$$i_{k+1} = \frac{h}{L} (kU - R_3 C u'_k - u_k - R_2 i_k) + i_k \quad (K. 3.6).$$

Если столбец « $u_k$ » присвоить столбцу «D», столбец « $u'_k$ » присвоить столбцу «E», а столбец « $i_k$ » присвоить столбцу «F», как это показано на рис. 6, то перечисленные формулы, записанные в ячейки D3, E3 и F3 соответственно, будут иметь вид:

$$= \$B\$10 / (\$B\$7 + \$B\$5) / \$B\$6 * (4,15 - D2 + \$B\$7 * F2) + D2$$

$$=(D3-D2)/\$B\$10$$

$$=\$B\$10/\$B\$8*(4,15-\$B\$5*\$B\$6*E3-D2-\$B\$9*F2)+F2$$

В ячейки «tk» (столбец «С») вводятся значения времени, кратные выбранной величине шага  $h$ , начиная от 0. Для этого следует ввести в ячейки С2 и С3 значения 0 и  $h$  соответственно, а затем, выделив обе этих ячейки, заполнить все строки (требуется взять не менее 300 строк), так называемым «маркером автозаполнения». При этом в каждой  $n$ -й строке столбца «С» будет автоматически помещено значение « $kh$ ».

В ячейки D2 и F2 следует ввести значения, равные 0, поскольку это соответствует нулевым начальным условиям задачи.

Наконец, следует перенести вычисления введенных формул на все 300 строк, используя при этом также «маркер автозаполнения».

Внешний вид расчетной программы показан на рис. К.3.6.

	A	B	C	D	E	F	G
1			tk	uk	u'k	ik	
2	U =	5	0	0		0	
3	k =	0,83	1,60E-03	0,051069066	3,19E+02	6,13E-03	
4	kU =	4,15	0,0032	0,116592383	4,10E+02	9,09E-03	
5	Rэ =	16,7	4,80E-03	0,188594829	4,50E+02	1,05E-02	
6	C =	6,00E-05	0,0064	0,263081856	4,66E+02	1,10E-02	
7	R2 =	200	8,00E-03	0,338060182	4,69E+02	1,12E-02	
8	L =	0,1	0,0096	0,412542523	4,66E+02	1,12E-02	
9	R3 =	300	1,12E-02	0,486047153	4,59E+02	1,11E-02	
10	h =	1,60E-04	0,0128	0,558346263	4,52E+02	1,09E-02	
11			1,44E-02	0,629339441	4,44E+02	1,07E-02	
12			0,016	0,698990051	4,35E+02	1,05E-02	
13			1,76E-02	0,767293253	4,27E+02	1,03E-02	
14			0,0192	0,834259928	4,19E+02	1,01E-02	
15			2,08E-02	0,899908595	4,10E+02	9,90E-03	
16			0,0224	0,964261358	4,02E+02	9,70E-03	
17			2,40E-02	1,027341868	3,94E+02	9,51E-03	
18			0,0256	1,089174307	3,86E+02	9,32E-03	

Рис. К.3.6 Внешний вид расчетной программы

#### 4.3. Отображение результатов вычислений

Для отображения результатов вычислений кривой зависимости напряжения на конденсаторе от времени  $u_k(t_k)$  необходимо проделать следующие операции:

«Вставка» → «Точечная» → «Точечная с прямыми отрезками»

В результате этих операций в поле файла появится пустое окно.

Произведя щелчок правой кнопкой по появившемуся окну следует нажать на вкладку: «Выбрать данные».

Нажав кнопку «Добавить», следует поставить курсор в поле «Значения X» и выделить все 300 строк данных из столбца «tk»; далее, поставив курсор в поле «Значения Y», следует выделить все 300 строк данных из столбца «uk».

После этого следует нажать «ОК».

Для отображения результатов вычислений кривой зависимости тока через катушку индуктивности от времени  $i_k(t_k)$  необходимо проделать аналогичные операции.

Графики зависимостей  $u_k(t_k)$  и  $i_k(t_k)$  для рассмотренного примера приведены на рис. К.3.7 и К.3.8 соответственно.

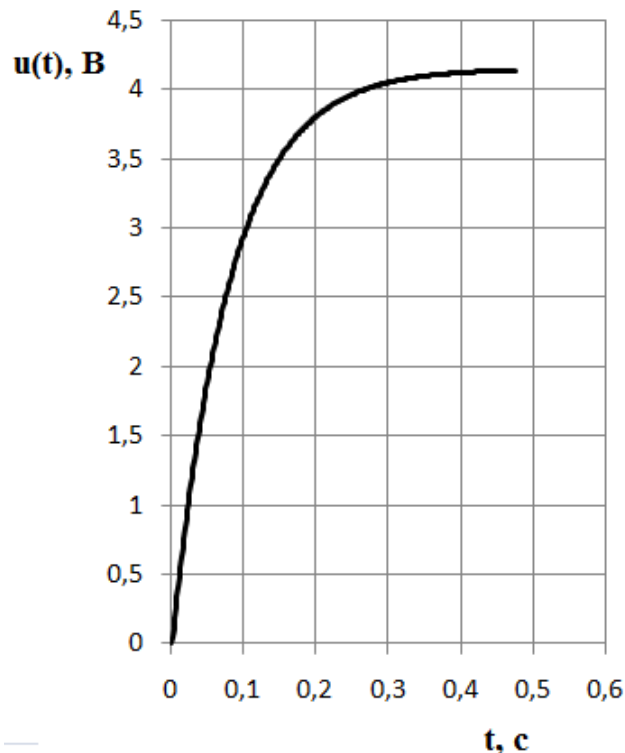


Рис. К.3.7 График зависимости напряжения на конденсаторе от времени

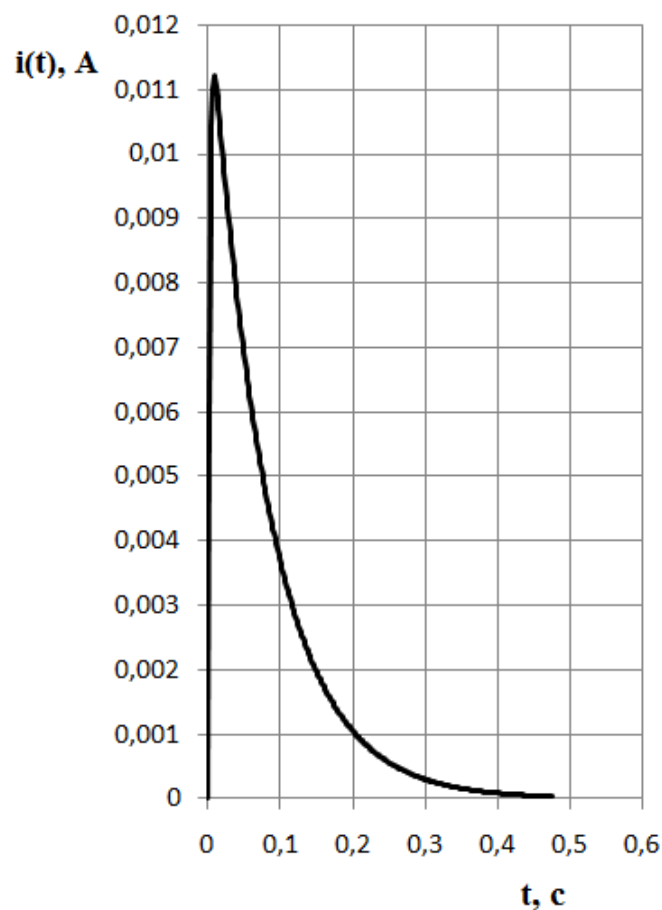


Рис. К.3.8 График зависимости тока через катушку от времени

### ПРИМЕР РАСЧЕТА №2 (периодический переходный процесс)

Рассчитать временные зависимости для ПС, для цепи, изображенной на рис. К.3.1, со следующими параметрами:

$r$ , Ом	20
$R_1$ , Ом	100
$R_2$ , Ом	1000
$R_3$ , Ом	200
$C$ , мкФ	2
$L$ , Гн	0,3

Поскольку топология электрической цепи не изменилась, п. 1 и 2 также остаются неизменными.

### 3. Определим экспериментально величину шага вычисления $h$

Для отыскания величины  $h$  следует собрать заданную в варианте схему и подключить к ней источник прямоугольных импульсов, как это показано на рис. К.3.9.

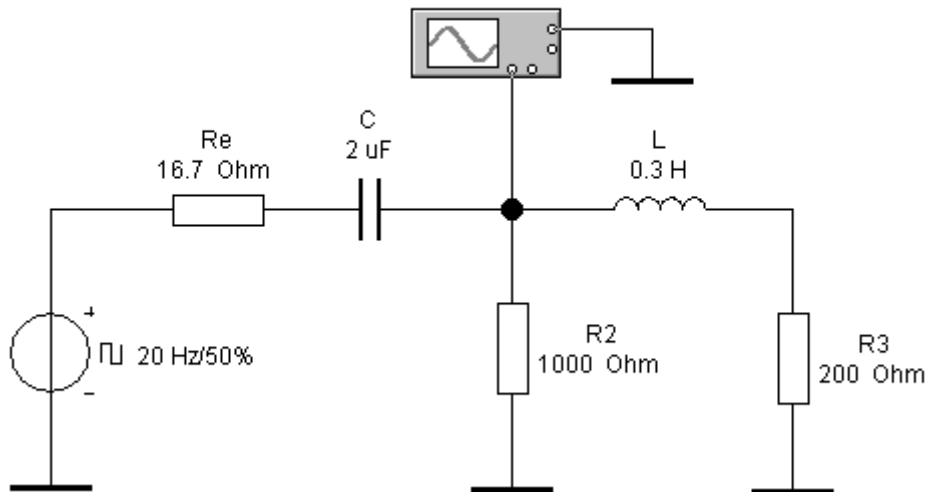


Рис. К.3.9 Схема для экспериментального определения величины шага  $h$

Как и в предыдущем примере, частоту следования импульсов следует подобрать так, чтобы импульсы успевали релаксировать, к моменту поступления следующего импульса. Как видно из рис. К.3.10, для данной схемы это условие выполнилось при  $f = 20$  Гц, что показывает осциллограмма напряжения, приведенная на рис. К.3.10.

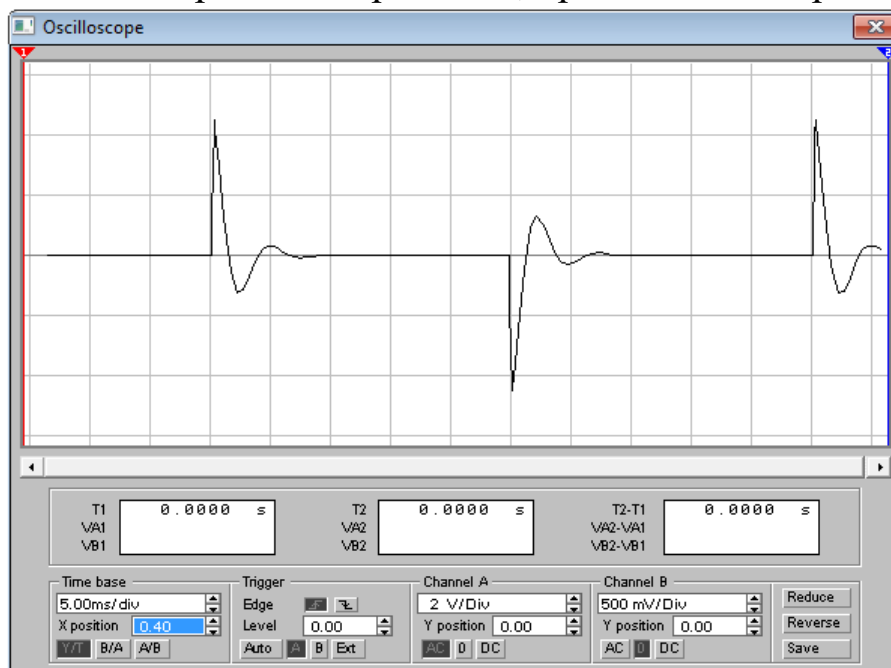


Рис. К.3.10 Осциллограмма напряжения, снятая для экспериментальной схемы



Из рис. К.3. 10 видно, что время переходного процесса приблизительно равно:

$$t_{nn} \approx 1,5 \text{ дел} \cdot 5 \frac{\text{мс}}{\text{дел}} = 7,5 \text{ мс}.$$

Значит, время релаксации переходного процесса:

$$\tau \approx \frac{t_{nn}}{5} = 1,5 \text{ мс}.$$

Тогда шаг вычисления  $h$  рассчитаем по формуле:

$$h = \frac{\tau}{50} = 0,03 \text{ мс}.$$

Далее, следует проделать аналогичные операции с программным файлом Microsoft Excel с новыми константами, заданными в Примере №2.

Внешний вид расчетного файла с данными Примера №2 представлен на рис. К.3.11.

Графики искомых зависимостей  $u_k(t_k)$  и  $i_k(t_k)$  представлены на рис. К. 3.12 и К.3.13 соответственно.

	A	B	C	D	E	F	G
1			tk	uk	u'k	ik	
2	U =	5	0	0		0	
3	k =	0,83	3,00E-05	0,061227501	2,04E+03	4,08E-04	
4	kU =	4,15	0,000006	0,127573854	2,21E+03	8,02E-04	
5	Rэ =	16,7	9,00E-05	0,198744354	2,37E+03	1,18E-03	
6	C =	2,00E-06	0,00012	0,274445959	2,52E+03	1,54E-03	
7	R2 =	1000	1,50E-04	0,354387751	2,66E+03	1,89E-03	
8	L =	0,3	0,00018	0,438281378	2,80E+03	2,22E-03	
9	R3 =	200	2,10E-04	0,525841477	2,92E+03	2,54E-03	
10	h =	3,00E-05	0,00024	0,616786075	3,03E+03	2,84E-03	
11			2,70E-04	0,710836969	3,14E+03	3,13E-03	
12			0,0003	0,807720091	3,23E+03	3,40E-03	
13			3,30E-04	0,907165847	3,31E+03	3,65E-03	
14			0,00036	1,008909442	3,39E+03	3,89E-03	
15			3,90E-04	1,112691182	3,46E+03	4,12E-03	
16			0,00042	1,218256755	3,52E+03	4,33E-03	
17			4,50E-04	1,325357498	3,57E+03	4,52E-03	
18			0,00048	1,43375064	3,61E+03	4,70E-03	

Рис. К.3.11 Внешний вид расчетного файла Примера №2

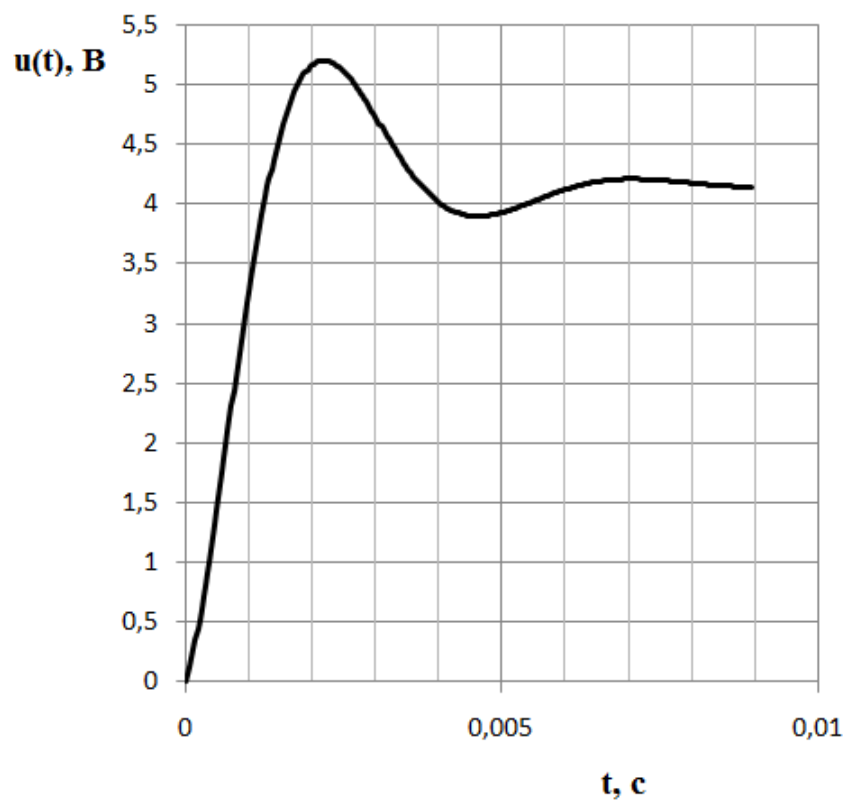


Рис. К.3.12 График зависимости напряжения на конденсаторе от времени

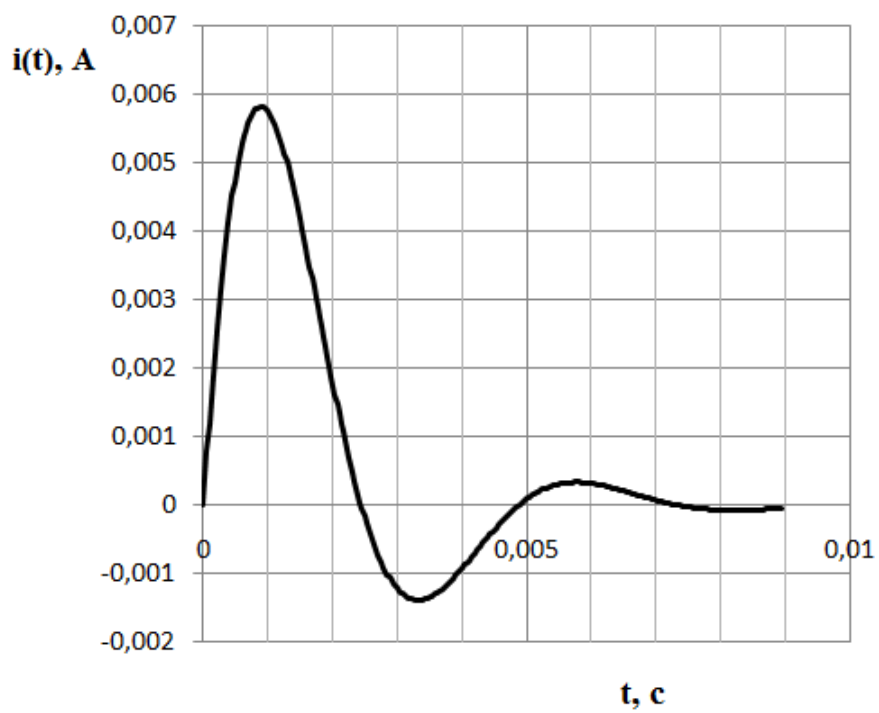


Рис. К.3.13 График зависимости тока через катушку от времени

## ТАБЛИЦЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ к КР №3

Вариант схемы и исходных данных выбирается по номеру в списке группы обучающегося, согласно таблице 3.1.

Таблица 3.1 Варианты схемы и исходных данных

№ вар	№ схемы	№ данных	шифр	№ схемы	№ данных	шифр	№ схемы	№ данных	шифр	№ схемы	№ данных
<b>1</b>	1	1	<b>7</b>	7	1	<b>13</b>	13	1	<b>19</b>	3	2
<b>2</b>	2	1	<b>8</b>	8	1	<b>14</b>	14	1	<b>20</b>	4	2
<b>3</b>	3	1	<b>9</b>	9	1	<b>15</b>	15	1	<b>21</b>	5	2
<b>4</b>	4	1	<b>10</b>	10	1	<b>16</b>	16	1	<b>22</b>	6	2
<b>5</b>	5	1	<b>1</b>	11	1	<b>17</b>	1	2	<b>23</b>	7	2
<b>6</b>	6	1	<b>12</b>	12	1	<b>18</b>	2	2	<b>24</b>	8	2

Параметры цепи выбираются обучающимся согласно «номеру данных», соответствующему выбранной схеме (табл. 3.1), согласно табл. 3.2.

Таблица 3.2 Варианты параметров цепи для заданной схемы

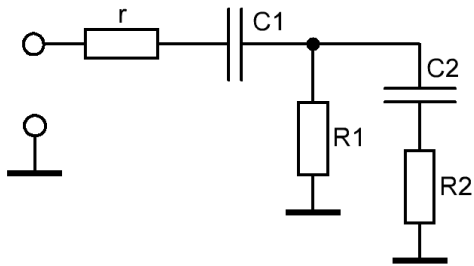
Схема №1						
№ данных	r, Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	R <sub>1</sub> , Ом	C <sub>2</sub> , мкФ	R <sub>2</sub> , Ом	
1	20	20	100	33	50	
2	25	25	150	30	75	
Схема №2						
№ данных	r, Ом	L, Гн	R <sub>1</sub> , Ом	C, мкФ	R <sub>2</sub> , Ом	
1	30	0,1	300	25	510	
2	40	0,2	250	18	470	
Схема №3						
№ данных	r, Ом	C, мкФ	L, Гн	R <sub>1</sub> , Ом	R <sub>2</sub> , Ом	
1	50	5	0,03	30	51	
2	60	7	0,05	35	47	
Схема №4						
№ данных	r, Ом	R <sub>1</sub> , Ом	L, Гн	C, мкФ	R <sub>2</sub> , Ом	
1	25	200	0,1	0,5	100	
2	35	300	0,15	1	150	
Схема №5						
№ данных	r, Ом	R <sub>1</sub> , Ом	L, Гн	R <sub>2</sub> , Ом	R <sub>3</sub> , Ом	C, мкФ
1	47	300	0,3	510	600	15
2	36	250	0,33	600	700	20
Схема №6						
№ данных	r, Ом	C, мкФ	R <sub>1</sub> , Ом	L, Гн	R <sub>2</sub> , Ом	
1	75	3,3	20	0,1	50	
2	100	5,1	40	0,2	40	

Схема №7						
№ данных	r, Ом	R <sub>1</sub> , Ом	L, Гн	R <sub>2</sub> , Ом	R <sub>3</sub> , Ом	C, мкФ
1	120	200	0,05	20	75	5
2	100	300	0,03	30	100	4
Схема №8						
№ данных	r, Ом	R <sub>1</sub> , Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	R <sub>2</sub> , Ом	C <sub>2</sub> , мкФ	
1	20	100	3	100	5	
2	30	200	4	50	7	
Схема №9						
№ данных	r, Ом	R <sub>1</sub> , Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	R <sub>2</sub> , Ом	C <sub>2</sub> , мкФ	
1	30	100	20	300	15	
2	40	150	15	250	20	
Схема №10						
№ данных	r, Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	R <sub>1</sub> , Ом	R <sub>2</sub> , Ом	C <sub>2</sub> , мкФ	
1	30	3	200	45	5	
2	40	5	220	33	7	
Схема №11						
№ данных	r, Ом	R <sub>1</sub> , Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	R <sub>2</sub> , Ом	C <sub>2</sub> , мкФ	
1	50	100	3	30	5	
2	40	200	5	33	10	
Схема №12						
№ данных	r, Ом	R <sub>1</sub> , Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	R <sub>2</sub> , Ом	C <sub>2</sub> , мкФ	
1	15	100	3	200	5	
2	25	120	4	300	7	
Схема №13						
№ данных	r, Ом	R <sub>1</sub> , Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	R <sub>2</sub> , Ом	C <sub>2</sub> , мкФ	R <sub>3</sub> , Ом
1	30	200	3	200	5	50
2	40	250	4,5	250	3,3	75
Схема №14						
№ данных	r, Ом	R <sub>1</sub> , Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	R <sub>2</sub> , Ом	C <sub>2</sub> , мкФ	
1	25	100	3	100	5	
2	38	90	4	75	7	
Схема №15						
№ данных	r, Ом	C <sub>1</sub> , мкФ	R <sub>1</sub> , Ом	L, Гн	R <sub>2</sub> , Ом	
1	15	10	100	0,3	25	
2	25	12	150	0,2	33	
Схема №16						
№ данных	r, Ом	R <sub>1</sub> , Ом	L, Гн	R <sub>2</sub> , Ом	C, мкФ	
1	15	120	0,1	200	1	
2	25	150	0,2	250	2	

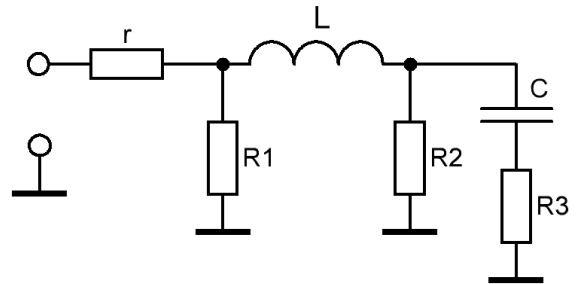
Замечание: напряжение, подаваемое на вход электрической цепи для всех вариантов постоянно и равно 5 В.

## СХЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ к КР №3

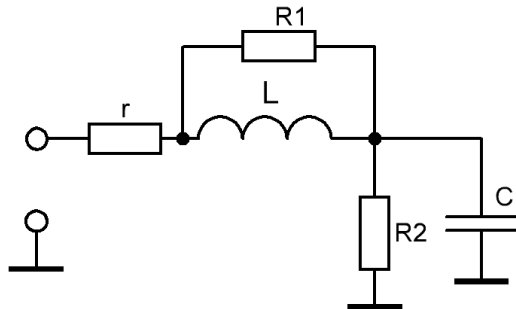
**СХЕМА №1**



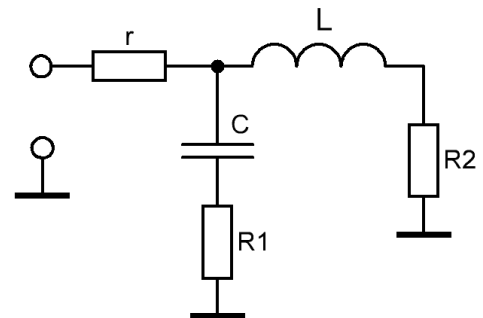
**СХЕМА №5**



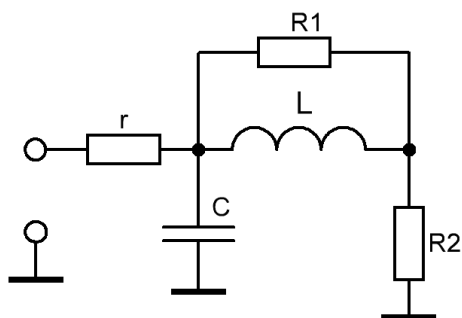
**СХЕМА №2**



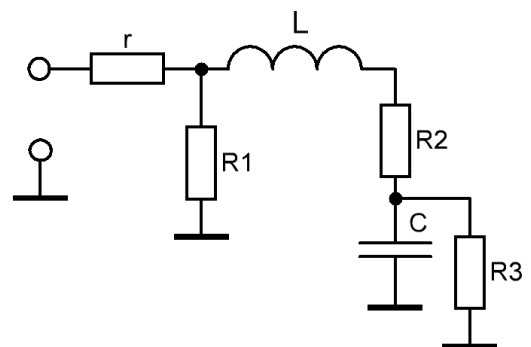
**СХЕМА №6**



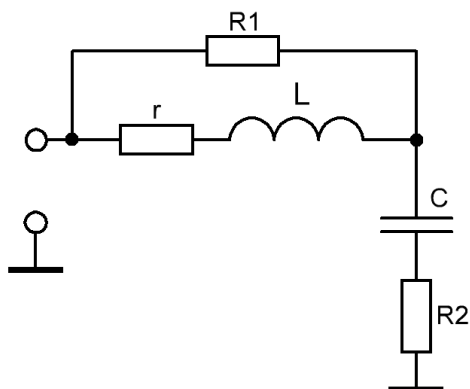
**СХЕМА №3**



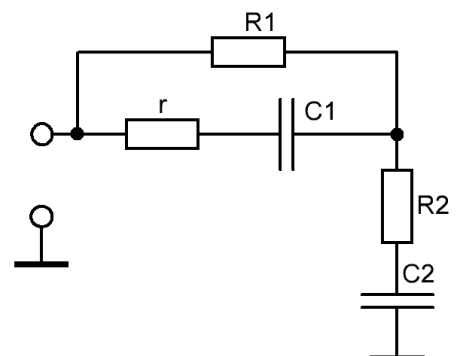
**СХЕМА №7**



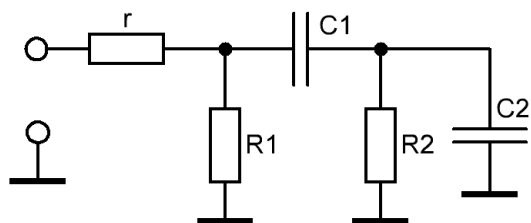
**СХЕМА №4**



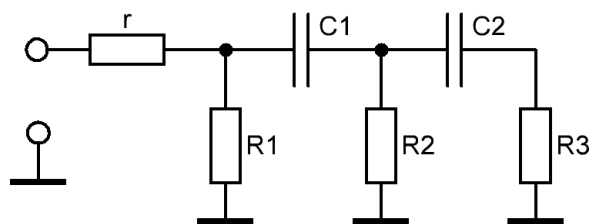
**СХЕМА №8**



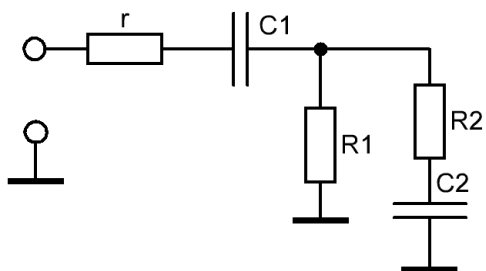
**CXEMA №9**



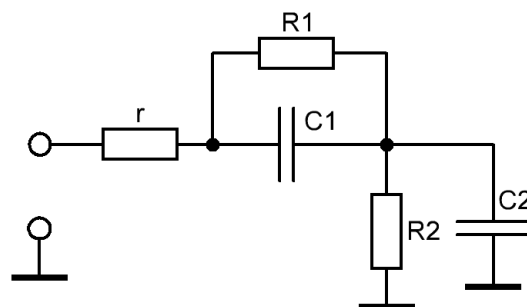
**CXEMA №13**



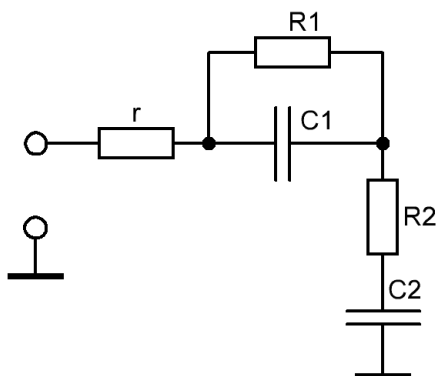
**CXEMA №10**



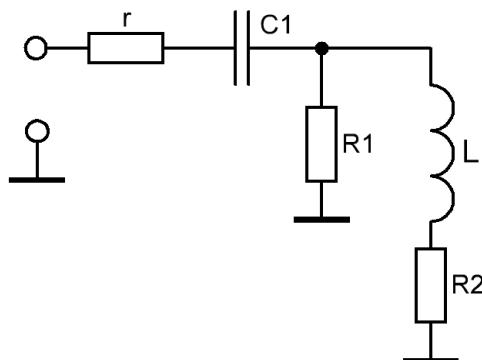
**CXEMA №14**



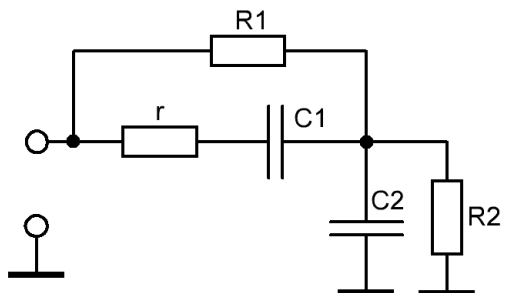
**CXEMA №11**



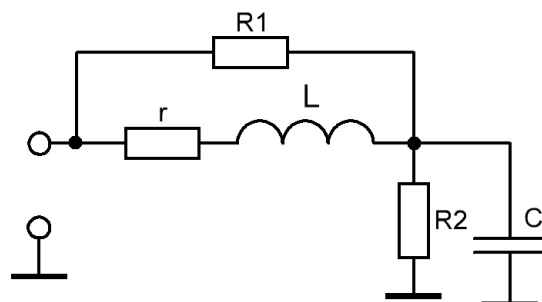
**CXEMA №15**



**CXEMA №12**



**CXEMA №16**



### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ к КР №3

1. Что такое электрические переходные процессы?
2. Что является причиной протекания переходных процессов в электрических цепях?
3. Что такое установившееся состояние электрической цепи?
4. Как определить установившееся состояние электрической цепи?
5. Что такое периодические переходные процессы? В каких электрических цепях они могут протекать?
6. Что такое апериодические переходные процессы? В каких электрических цепях они могут протекать?
7. Сформулируйте законы коммутации.
8. В чем суть метода переменных состояния?
9. Чем характеризуется состояние электрической цепи в методе переменных состояния?
10. Запишите законы Ома в дифференциальной форме и поясните их физический смысл.
11. Найдите закон изменения напряжения на катушке индуктивности, если через нее протекает ток, изменяющийся по закону:  $i(t) = 0,1e^{-300t}$ .
12. Найдите закон изменения тока, протекающего через конденсатор, если напряжение на нем изменяется по закону:  $u(t) = 3 + 15\sin(100t)$ .
13. Что такое метод конечных разностей?
14. Запишите формулы для отыскания производных силы тока и напряжения методом конечных разностей; каким следует выбирать шаг вычисления  $h$ ?
15. Как экспериментально выбрать значение шага вычисления  $h$ ?

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Символическое представление электрических величин на переменном синусоидальном токе.
2. Полное сопротивление цепи на переменном токе: активно-индуктивное и активно-емкостное сопротивления.
3. Полное сопротивление цепи на переменном токе; понятие частотно-зависимого четырехполюсника.
4. Понятие электрического фильтра: фильтры нижних частот, фильтры верхних частот, полосовые и режекторные фильтры.
5. Определение ЛАЧХ простейших электрических фильтров символическим методом, при их работе в режиме холостого хода.
6. Определение ЛАЧХ простейших электрических фильтров символическим методом, при их работе на электрическую нагрузку.
7. Понятие спектра электрического сигнала; типовые периодические сигналы несинусоидальной формы и их практическое применение.
8. Представление периодических сигналов в виде ряда Фурье; основные свойства спектров периодических сигналов.
9. Алгоритм быстрого преобразования Фурье.
10. Методы экспериментального определения спектров периодических сигналов.
11. Метод суперпозиции для определения отклика электрической цепи на воздействие источника периодического несинусоидального напряжения.
12. Понятие переходных процессов в линейных электрических цепях: причины возникновения, законы коммутации, законы Ома в дифференциальной форме.
13. Переходные процессы в простейших электрических цепях: в  $RC$ -цепи, в  $RL$ -цепи, в  $RLC$ -цепи.
14. Метод переменных состояния: выбор переменных состояния, выбор расчетного шага, принцип получения рекуррентных формул.
15. Метод экспериментальной проверки динамики переходных процессов при помощи средств аналоговой и цифровой схемотехники.



## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Частотно-зависимые линейные четырехполюсники.....	4
2. Спектры периодических сигналов.....	11
3. Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях с использованием средств ПК.....	15
Контрольная работа №1.....	20
Контрольная работа №2.....	28
Контрольная работа №3.....	39
Вопросы к экзамену.....	55

Учебное издание

**Воржев Владимир Борисович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТРОЙСТВ  
ЭЛЕКТРОНИКИ И РАДИОТЕХНИКИ.  
КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ**

учебное пособие

Редактор Е.Ю. Прорешная  
Компьютерная обработка: С.Ю. Матузова

---

В печать 29.08.2019.  
Формат 60×84/16. Объем 2,1 усл. п. л.  
Тираж 55 экз. Заказ № 797. Цена свободная

---

Издательский центр ДГТУ  
Адрес университета и полиграфического предприятия:  
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1